



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez  
Unię Europejską w ramach  
Europejskiego Funduszu  
Społecznego

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



<b>Nazwa przedmiotu</b>		<b>Kod ECTS</b>						
Rachunek prawdopodobieństwa		11.1.0511						
<b>Nazwa jednostki prowadzącej przedmiot</b>								
Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki								
<b>Studia</b>								
<b>wydział</b>	<b>kierunek</b>	<b>poziom</b>	<b>pierwszego stopnia</b>					
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki	Bioinformatyka	<b>forma</b>	stacjonarne					
		<b>moduł</b>	Podstawowa					
		<b>specjalnościowy</b>	Podstawowa					
<b>specjalizacja</b>	Podstawowa							
<b>Nazwisko osoby prowadzącej (osób prowadzących)</b>								
prof. UG, dr hab. Marcin Marciniak; prof. UG, dr hab. Wiesław Laskowski; mgr Krzysztof Rosołek; dr Maciej Kuna								
<b>Formy zajęć, sposób ich realizacji i przypisana im liczba godzin</b>					<b>Liczba punktów ECTS</b>			
<b>Formy zajęć</b>					3 Przedmiot w wymiarze 15h wykładu i 30h ćwiczeń + praca własna			
Wykład, Ćw. audytoryjne								
<b>Sposób realizacji zajęć</b>								
zajęcia w sali dydaktycznej								
<b>Liczba godzin</b>								
Wykład: 15 godz., Ćw. audytoryjne: 30 godz.								
<b>Termin realizacji przedmiotu</b>								
2020/2021 zimowy								
<b>Status przedmiotu</b>				<b>Język wykładowy</b>				
obowiązkowy				polski				
<b>Metody dydaktyczne</b>				<b>Forma i sposób zaliczenia oraz podstawowe kryteria oceny lub wymagania egzaminacyjne</b>				
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rozwiązywanie zadań</li> <li>- praca własna - przygotowanie się do egzaminu</li> <li>- praca własna - rozwiązywanie zadań domowych</li> </ul>				<b>Sposób zaliczenia</b>				
				<ul style="list-style-type: none"> <li>- Zaliczenie na ocenę</li> <li>- Egzamin</li> </ul>				
				<b>Formy zaliczenia</b>				
				<ul style="list-style-type: none"> <li>- egzamin ustny</li> <li>- egzamin pisemny z pytaniami (zadaniami) otwartymi</li> <li>- kolokwium</li> <li>- Wykład - egzamin</li> <li>Ćwiczenia - zaliczenie na ocenę</li> </ul>				
				<b>Podstawowe kryteria oceny</b>				
				Egzamin: uzyskanie ponad połowy maksymalnej ilości punktów na egzaminie pisemnym lub poprawna odpowiedź na dwa pytania z trzech na egzaminie ustnym. Zaliczenie: uzyskanie ponad połowy maksymalnej ilości punktów z kolokwiów.				
<b>Sposób weryfikacji założonych efektów kształcenia</b>								
zakładany efekt kształcenia		Egzamin	Kolokwium	mtd. dydakt 4	mtd. dydakt 5	mtd. dydakt 6	mtd. dydakt 7	mtd. dydakt 8
	Wiedza							
K_W02		+	+					
	Umiejętności							
K_U01		+	+					
<b>Określenie przedmiotów wprowadzających wraz z wymogami wstępnymi</b>								

**A. Wymagania formalne**

Zaliczone przedmioty:

- Matematyka (I sem.)
- Matematyka dyskretna i algebra liniowa (II sem.)

**B. Wymagania wstępne**

Wymagania wstępne przedmiotu Matematyka (I sem.) oraz dodatkowo student powinien znać:

1. Działania na zbiorach i prawa rachunku zbiorów, pojęcie pary uporządkowanej i iloczynu kartezjańskiego zbiorów; pojęcie funkcji.
2. Określenie liczby zespolonej, jednostki urojonej, części rzeczywistej i urojonej, liczby sprzężonej i modułu; pojęcie postaci trygonometrycznej liczby zespolonej; wzór de Moivre'a; wzór na pierwiastki z liczby zespolonej; interpretację geometryczną zbioru liczb zespolonych.
3. Podstawowe typy funkcji elementarnych i ich własności: funkcje potęgowe, funkcje liniowe, kwadratowe, wielomiany, funkcje wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne.
4. Pojęcie granicy funkcji rzeczywistej w punkcie; definicja Heinego i Cauchy'ego; granice jednostronne funkcji w punkcie, granice niewłaściwe; pojęcie ciągłości funkcji w punkcie; pojęcie funkcji ciągłej; własności funkcji ciągłych: własność Darboux, twierdzenie Weierstrassa.
5. Definicję pochodnej funkcji w punkcie; pojęcie funkcji różniczkowalnej; interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej; wzory na pochodną sumy, iloczynu i ilorazu funkcji; wzór na pochodną funkcji złożonej; własności funkcji różniczkowalnych: ciągłość, twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej; związki między pochodną a ekstremami lokalnymi i monotonicznością.
6. Określenie pochodnych wyższych rzędów; pojęcie funkcji n-krotnie różniczkowalnej i funkcji gładkiej; związki między drugą pochodną a kształtem wykresu; twierdzenie Taylora; wzór Taylora i określenie reszty we wzorze Taylora.
7. Ogólną ideę konstrukcji całki Riemanna; pojęcie funkcji pierwotnej; twierdzenie Newtona-Leibniza; określenie całki nieoznaczonej i oznaczonej; interpretację geometryczną całki oznaczonej; metody całkowania funkcji jednej zmiennej: przez części, przez podstawianie, całkowanie funkcji wymiernych, całkowanie funkcji wymiernych od funkcji trygonometrycznych, podstawienia Eulera; zastosowania geometryczne.
8. Pojęcie przestrzeni wektorowej i wektora; działania na wektorach; określenie iloczynu skalarnego i jego własności; pojęcie iloczynu wektorowego i jego własności; określenie normy wektora i odległości wektorów w przestrzeni euklidesowej; równania prostej i płaszczyzny w dwu- i trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.
9. Określenie funkcji wielu zmiennych; pojęcie ciągłości funkcji wielu zmiennych; określenie pochodnej i pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych.
10. Pojęcie macierzy; działania na macierzach i ich własności: dodawanie, mnożenie przez liczbę, mnożenie macierzy; określenie wyznacznika macierzy i jego własności: rozwinięcie Laplace'a względem kolumny; określenie rzędu macierzy; definicję macierzy odwracalnej i warunki równoważne odwracalności, metody wyznaczania macierzy odwrotnej.
11. Podstawowe pojęcia kombinatoryczne: kombinacja, wariacja, permutacja; wzory na ilość różnych obiektów kombinatorycznych; wzory na ilość: podzbiorów, wszystkich funkcji, iniekcji, surjekcji; wzór włączeń-wyłączeń.

i potrafić:

1. Wykonywać działania na zbiorach; wyznaczać iloczyn kartezjański dwóch zadanych zbiorów i interpretować go geometrycznie.
2. Wykonywać działania na liczbach zespolonych; wyznaczać postać trygonometryczną liczby zespolonej; potęgować i obliczać pierwiastki z liczb zespolonych; rozwiązywać równania o współczynnikach zespolonych
3. Szkicować wykresy funkcji elementarnych i je przekształcać; określać ich dziedziny; badać różnowartościowość i odwracalność funkcji; wyznaczać funkcję odwrotną do funkcji zadanej wzorem.
4. Obliczać granice funkcji w punkcie; badać ciągłość funkcji.
5. Obliczać pochodne na podstawie wzorów na pochodną sumy, iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji; wyznaczać ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności.
6. Obliczać pochodne wyższych rzędów; obliczać współczynniki w rozwinięciu Taylora dla funkcji n-krotnie różniczkowalnej.
7. Obliczać całki nieoznaczone i oznaczone; stosować je do rozwiązywania problemów geometrycznych.
8. Obliczać kombinacje liniowe wektorów; obliczać długość wektora w przestrzeni euklidesowej; obliczać kąt między wektorami; obliczać odległość między punktami w przestrzeni euklidesowej; wyznaczać równania prostych i płaszczyzn w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.
9. Badać ciągłość funkcji wielu zmiennych; obliczanie pochodne cząstkowe; wyznaczać ekstrema lokalne funkcji dwóch i trzech zmiennych.
10. Wykonywać działania na macierzach; obliczać wyznaczniki macierzy kwadratowych niskich wymiarów; obliczać rząd macierzy; badać odwracalność macierzy i wyznaczać macierz odwrotną.
11. Rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne wymagające znajomości wzorów na ilość kombinacji, wariacji, permutacji, podzbiorów, wszystkich funkcji, iniekcji i surjekcji oraz wzoru włączeń-wyłączeń.

**Cele kształcenia**

Opanowanie elementów probabilistyki niezbędnych w biologii, informatyce, fizyce, chemii i statystyce.

**Treści programowe**

1. Elementy teorii miary i całki.
2. Przestrzenie probabilistyczne: koncepcja zdarzenia i prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń.
3. Zmienne losowe jednowymiarowe i ich rozkłady.
4. Wektory losowe i niezależność zmiennych losowych.
5. Metoda funkcji tworzących i funkcji charakterystycznych
6. Zbieżności zmiennych losowych i twierdzenia graniczne.

7. Elementy teorii łańcuchów Markowa.
8. Elementy teorii procesów stochastycznych.

**Wykaz literatury**

- P. Billingsley, Prawdopodobieństwo i miara, PWN 1987  
 A.A. Borowkow, Rachunek prawdopodobieństwa, PWN 1975,  
 J. Jakubowski, R. Sztencel, Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, SCRIPT 2001  
 G. Krzykowski, M. Szreder, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, cz.I, Wydawnictwo UG 2002,  
 A. Plucińska, E. Pluciński, Rachunek prawdopodobieństwa. Statystyka matematyczna. Procesy stochastyczne, WNT 2000

**Kierunkowe efekty kształcenia**

K\_W02 ma wiedzę z zakresu matematyki, biologii, chemii i fizyki w zakresie niezbędnym do opisu, interpretacji i modelowania podstawowych zjawisk i procesów biologicznych  
 K\_U01 potrafi zastosować wiedzę matematyczną i informatyczną do formułowania, analizowania i rozwiązywania prostych zadań związanych z bioinformatyką

**Wiedza**

Student zna (K\_W02):

1. Definicję ciała i  $\sigma$ -ciała podzbiorów oraz ich własności; pojęcie  $\sigma$ -ciała generowanego przez rodzinę podzbiorów; pojęcie  $\sigma$ -ciała podzbiorów borelowskich w zbiorze liczb rzeczywistych; pojęcie przestrzeni mierzalnej i funkcji mierzalnej, warunki charakteryzujące mierzalność funkcji rzeczywistej; pojęcie funkcji borelowskiej; definicję miary i jej własności, określenie miary Radona; określenie miary Lebesgue'a na prostej; konstrukcję całki względem miary i całki Lebesgue'a, twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i ograniczonej, lemat Fatou.
2. Definicję przestrzeni probabilistycznej; koncepcję zdarzenia elementarnego i zdarzenia; definicję prawdopodobieństwa i przykłady miar probabilistycznych.
3. Koncepcję prawdopodobieństwa warunkowego i niezależności zdarzeń; wzory na prawdopodobieństwo całkowite i Bayesa; metodę „drzewek”; schemat Bernoulliego.
4. Definicję zmiennej losowej; określenie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej i jej dystrybuanty; warunki charakteryzujące dystrybuanty; wyodrębnienie rozkładów typu dyskretnego i typu ciągłego; przykłady rozkładów obu typów; pojęcie gęstości prawdopodobieństwa; określenie i metody obliczania wartości oczekiwanej, wariancji, momentów i momentów centralnych.
5. Definicję wektora losowego, jego rozkładu prawdopodobieństwa, dystrybuanty i rozkładów brzegowych; pojęcie rozkładu produktowego; koncepcję pojęcia niezależności zmiennych losowych; określenie i metody obliczania momentów mieszanych, kowariancji, współczynnika korelacji; określenie splotu rozkładów prawdopodobieństwa jako rozkładu sumy niezależnych zmiennych losowych.
6. Definicje funkcji tworzącej i funkcji charakterystycznej rozkładu prawdopodobieństwa i ich własności.
7. Definicje zbieżności zmiennych losowych: z prawdopodobieństwem 1, według prawdopodobieństwa i według rozkładu; zależności między różnymi typami zbieżności; twierdzenia graniczne: prawa wielkich liczb (słabe i mocne), centralne twierdzenie graniczne, twierdzenie graniczne Poissona i ich zastosowania.
8. Określenie własności Markowa i definicję łańcucha Markowa; pojęcie macierzy stochastycznej i macierzy prawdopodobieństw przejść; pojęcie stanu chwilowego i powracającego; twierdzenie o łańcuchach nieprzywiedlnych; definicję rozkładu stacjonarnego.
9. Definicję procesu stochastycznego z czasem dyskretnym i ciągłym; określenie funkcji korelacji; własności procesów stochastycznych: stacjonarność, ergodyczność, własność Markowa; wybrane przykłady i ich własności: procesy Poissona i martyngały.

**Umiejętności**

Student potrafi (K\_U01):

1. Zbadać, czy dana rodzina podzbiorów jest  $\sigma$ -ciałem; wyznaczyć  $\sigma$ -ciało generowane przez daną skończoną rodzinę zbiorów skończonych; zbadać mierzalność funkcji rzeczywistej określonej na danej przestrzeni mierzalnej; zbadać czy dana funkcja zbioru jest miarą; obliczyć całkę z funkcji prostej względem dowolnej miary.
2. Rozwiązywać zadania dotyczące modelu prawdopodobieństwa klasycznego z wykorzystaniem wzorów kombinatorycznych.
3. Rozwiązywać zadania z wykorzystaniem wzorów na prawdopodobieństwo odwrotne i Bayesa oraz stosować metodę „drzewek”; rozpoznawać w

- zagadnieniach praktycznych schemat Bernoulliego.
4. Wyznaczać rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej dla przypadków dyskretnych i ciągłych; obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń związanych ze zmiennymi; obliczać wartość oczekiwaną, wariancję, momenty i momenty centralne zmiennych losowych różnych typów.
  5. Wyznaczać rozkład wektora losowego, jego dystrybuantę i rozkłady brzegowe; badać niezależność zmiennych losowych; obliczać momenty mieszane, kowariancję, współczynnik korelacji; wyznaczać spłot rozkładów; wyznaczać rozkład funkcji od wektora losowego.
  6. Obliczać funkcję tworzącą i funkcję charakterystyczną dla danego rozkładu prawdopodobieństwa.
  7. Badać zbieżność zmiennych losowych i określać jej typ w prostych przykładach; rozwiązywać te zadania z zastosowaniem twierdzeń granicznych.
  8. Wyznaczać macierz prawdopodobieństw przejść dla danego łańcucha Markowa; badać nieprzywiedlność łańcucha i określać typ łańcucha nieprzywiedlnego; wyznaczać rozkład stacjonarny.
  9. Obliczać funkcję korelacji dla prostych procesów stochastycznych; badać stacjonarność i ergodyczność procesu.

**Kompetencje społeczne (postawy)****Kontakt**

matmm@univ.gda.pl