



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Projekt współfinansowany przez  
Unię Europejską w ramach  
Europejskiego Funduszu  
Społecznego

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



<b>Nazwa przedmiotu</b>		<b>Kod ECTS</b>							
Metody matematyczne fizyki I		13.2.0191							
<b>Nazwa jednostki prowadzącej przedmiot</b>									
Faculty of Mathematics, Physics and Informatics									
<b>Studia</b>									
<b>wydział</b>	<b>kierunek</b>	<b>poziom</b>	<b>pierwszego stopnia</b>						
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki	Fizyka	<b>forma</b>	stacjonarne						
		<b>moduł</b>	fizyka						
		<b>specjalnościowy</b>	wszystkie						
<b>specjalizacja</b>									
<b>Nazwisko osoby prowadzącej (osób prowadzących)</b>									
mgr Krzysztof Szczygielski; prof. dr hab. Władysław Majewski; prof. UG, dr hab. Marcin Marciniak									
<b>Formy zajęć, sposób ich realizacji i przypisana im liczba godzin</b>					<b>Liczba punktów ECTS</b>				
<b>Formy zajęć</b>					6 Przedmiot w wymiarze 30h wykładu i 30h ćwiczeń + praca własna studenta				
Wykład, Ćw. audytoryjne									
<b>Sposób realizacji zajęć</b>									
zajęcia w sali dydaktycznej									
<b>Liczba godzin</b>									
Ćw. audytoryjne: 30 godz., Wykład: 30 godz.									
<b>Cykl dydaktyczny</b>									
2017/2018 zimowy									
<b>Status przedmiotu</b>				<b>Język wykładowy</b>					
obowiązkowy				polski					
<b>Metody dydaktyczne</b>				<b>Forma i sposób zaliczenia oraz podstawowe kryteria oceny lub wymagania egzaminacyjne</b>					
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Rozwiązywanie zadań</li> <li>- praca własna - przygotowanie się do egzaminu</li> <li>- praca własna - rozwiązywanie zadań</li> </ul>				<b>Sposób zaliczenia</b>					
				<ul style="list-style-type: none"> <li>- Zaliczenie na ocenę</li> <li>- Egzamin</li> </ul>					
				<b>Formy zaliczenia</b>					
					<ul style="list-style-type: none"> <li>- egzamin ustny</li> <li>- egzamin pisemny z pytaniami (zadaniami) otwartymi</li> <li>- kolokwium</li> </ul>				
				<b>Podstawowe kryteria oceny</b>					
				Egzamin: Uzyskanie min. 50% punktów z egzaminu pisemnego lub poprawna odpowiedź na 2 pytania z trzech na egzaminie ustnym. Ćwiczenia: Uzyskanie min. 50% punktów z kolokwium zaliczeniowego.					
<b>Sposób weryfikacji założonych efektów kształcenia</b>									
zakładany efekt kształcenia	Egzamin	Kolokwium	mtd. dydakt 3	mtd. dydakt 4	mtd. dydakt 5	mtd. dydakt 6	mtd. dydakt 7	mtd. dydakt 8	
	Wiedza								
K_W02	+	+							
K_W04	+	+							
	Umiejętności								
K_U8	+	+							
<b>Określenie przedmiotów wprowadzających wraz z wymogami wstępnymi</b>									
<b>A. Wymagania formalne</b>									

Zaliczone przedmioty:

1. Analiza matematyczna - 1 i 2 sem.,
2. Algebra liniowa z geometrią - 1 i 2 sem.

### B. Wymagania wstępne

Znajomość następujących pojęć i zagadnień:

1. Funkcje elementarne: funkcja potęgowa, wielomian, funkcja wymierna, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne i funkcje cyklometryczne. Złożenie funkcji. Funkcja odwrotna.
2. Granica ciągu liczbowego. Twierdzenia dotyczące granic: twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych. Liczba  $e$
3. Granica funkcji rzeczywistej w punkcie; definicja Heinego i Cauchy'ego. Granice jednostronne funkcji w punkcie, granice niewłaściwe. Ciągłość funkcji w punkcie; funkcja ciągła. Własności funkcji ciągłych: własność Darboux, twierdzenie Weierstrassa. Asymptota pionowa i pozioma.
4. Iloraz różnicowy; różniczkowalność funkcji w punkcie; pochodna; funkcja różniczkowalna. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Wzory na pochodną sumy, iloczynu i ilorazu funkcji; wzór na pochodną funkcji złożonej. Własności funkcji różniczkowalnych: ciągłość, twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Związki między pochodną a ekstremami lokalnymi i monotonicznością. Różniczka zupełna.
5. Pochodne wyższych rzędów; funkcja  $n$ -krotnie różniczkowalna; funkcja gładka. Związki między drugą pochodną a kształtem wykresu. Twierdzenie Taylora; wzór Taylora i reszta we wzorze Taylora.
6. Szereg liczbowy; zbieżność szeregu liczbowego. Kryteria zbieżności szeregów liczbowych. Szereg potęgowy; promień zbieżności szeregu potęgowego; wzór Cauchy'ego-Hadamarda. Szereg Taylora funkcji gładkiej.
7. Całka Riemanna, sumy riemannowskie. Funkcja pierwotna. Twierdzenie Newtona-Leibniza. Całka nieoznaczona i oznaczona. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej. Metody całkowania funkcji jednej zmiennej: przez części, przez podstawianie, całkowanie funkcji wymiernych, całkowanie funkcji wymiernych od funkcji trygonometrycznych, podstawienia Eulera. Zastosowania geometryczne i fizyczne całki oznaczonej.
8. Funkcje wielu zmiennych. Ciągłość funkcji wielu zmiennych. Różniczkowalność, pochodna i pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Warunki konieczne i równoważne istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych. Ekstremum warunkowe; metoda mnożników Lagrange'a.
9. Całkowanie funkcji wielu zmiennych. Całka iterowana; twierdzenie Fubini'ego. Jakobian, twierdzenie o zamianie zmiennych w całce wielokrotnej. Całka krzywoliniowa niezorientowana i zorientowana; twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną; interpretacja geometryczna i fizyczna całek krzywoliniowych. Całka powierzchniowa niezorientowana i zorientowana; twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej na całkę podwójną; interpretacja geometryczna i fizyczna całek powierzchniowych. Pole gradientowe; dywergencja i rotacja pola wektorowego. Twierdzenie Ostrogradzkiego-Gaussa, twierdzenie Greena, twierdzenie Stokesa.
10. Liczby zespolone; płaszczyzna zespolona. Część rzeczywista, część urojona, moduł, sprzężenie i argument liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych. Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Wzór de Moivre'a; wzór na pierwiastki  $n$ -tego stopnia z liczby zespolonej.
11. Układ równań liniowych. Macierz podstawowa i rozszerzona układu równań. Operacje elementarne na wierszach macierzy. Wyznacznik macierzy; rząd macierzy. Macierz odwracalna; macierz odwrotna. Twierdzenie Craméra. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego; metoda eliminacji Gaussa.
12. Przestrzeń liniowa. Liniowa niezależność układu wektorów; układ generujący; baza przestrzeni liniowej. Rozwinięcie wektora względem bazy. Macierz zmiany bazy.
13. Przekształcenie liniowe. Macierz przekształcenia liniowego. Wyznacznik macierzy; rząd macierzy. Macierz odwracalna, macierz symetryczna, macierz hermitowska.

Umiejętności:

1. Szkicowanie wykresów funkcji elementarnych i ich przekształcanie. Określanie dziedziny. Badanie różnowartościowości i odwracalności funkcji. Wyznaczanie funkcji odwrotnej do funkcji zadanej wzorem.
2. Obliczanie granic ciągów.
3. Obliczanie granic funkcji w punkcie. Badanie ciągłości funkcji. Wyznaczanie asymptot.
4. Obliczanie pochodnej z definicji. Obliczanie pochodnych na podstawie wzorów na pochodną sumy, iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji. Wyznaczanie ekstremów lokalnych i przedziałów monotoniczności; wyznaczanie wartości ekstremalnych w przedziale domkniętym.
5. Obliczanie pochodnych wyższych rzędów. Obliczanie współczynników w rozwinięciu Taylora dla funkcji  $n$ -krotnie różniczkowalnej.
6. Badanie zbieżności szeregów za pomocą kryteriów zbieżności. Wyznaczanie promienia zbieżności szeregu potęgowego; badanie zbieżności na końcach przedziału zbieżności. Rozwijanie funkcji w szereg Taylora i wyznaczanie jego promienia zbieżności.
7. Obliczanie całek nieoznaczonych i oznaczonych. Stosowanie ich do rozwiązywania problemów geometrycznych i fizycznych.
8. Badanie ciągłości funkcji wielu zmiennych. Badanie różniczkowalności funkcji wielu zmiennych; obliczanie pochodnych cząstkowych. Wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych.
9. Obliczanie całek funkcji wielu zmiennych; zamiana całki po obszarze na całkę iterowaną. Korzystanie ze współrzędnych biegunowych. Obliczanie całek krzywoliniowych i powierzchniowych. Korzystanie z twierdzeń Greena, Ostrogradzkiego-Gaussa i Stokesa.
10. Wykonywanie działań na liczbach zespolonych. Wyznaczanie postaci trygonometrycznej dla liczby zespolonej; obliczanie potęg i pierwiastków z liczb zespolonych. Rozwiązywanie równań wielomianowych o współczynnikach zespolonych.
11. Obliczanie wyznacznika i rzędu macierzy; wyznaczanie macierzy odwrotnej. Badanie rozwiązalności układów równań. Stosowanie wzorów Craméra i metody eliminacji Gaussa.
12. Badanie liniowej niezależności układu wektorów; wyznaczanie podprzestrzeni generowanej przez układ wektorów. Badanie, czy układ

wektorów jest bazą przestrzeni liniowej. Rozwijanie wektora względem bazy.

13. Badanie liniowości przekształcenia. Wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego w bazach.

### Cele kształcenia

Zapoznanie z technikami matematyki wyższej w zakresie niezbędnym do opisu zjawisk fizycznych i rozwiązywania problemów fizycznych.

### Treści programowe

1. Elementy teorii funkcji zespolonych.
2. Szereg Laurenta, residua i obliczanie całek za ich pomocą.
3. Wybrane równania fizyki matematycznej.
4. Szeregi i całki Fouriera, wielomiany ortogonalne.
5. Transformacja Fouriera i jej zastosowania.
6. Technika funkcji Greena dla wybranych równań fizyki matematycznej.
7. Elementy teorii miary i całka Lebesgue'a.
8. Operatory różniczkowe i całkowe.
9. Zagadnienie własne dla operatorów. Przykłady.
10. Rozmaitości różniczkowalne.
11. Formy różniczkowe i ich całkowanie.

### Wykaz literatury

- F. Leja, Funkcje zespolone, PWN 1973  
 W. A. Majewski, Matematyczne metody fizyki, UG 1989  
 F.W. Byron, R.W. Fuller, Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej, t. 1, 2, PWN 1975  
 M. Spivak, Analiza na rozmaitościach, PWN 1977  
 W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN 1998

### Efekty kształcenia

#### (obszarowe i kierunkowe)

K\_W02 rozumie rolę eksperymentu fizycznego, matematycznych modeli teoretycznych przybliżających rzeczywistość oraz symulacji komputerowych w metodologii badań naukowych; ma świadomość ograniczeń technologicznych, aparaturowych i metodologicznych w badaniach naukowych  
 K\_W04 zna podstawowe techniki matematyki wyższej, w tym rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej i wielu zmiennych, oraz podstawy algebry w zakresie niezbędnym do opisu zjawisk fizycznych i rozwiązywania problemów fizycznych  
 K\_U08 potrafi posługiwać się aparatem matematycznym i metodami numerycznymi do opisu i modelowania zjawisk i procesów fizycznych

### Wiedza

Student zna:

- podstawowe własności topologiczne płaszczyzny zespolonej, pojęcie funkcji holomorficznej, pojęcie całki krzywoliniowej z funkcji zespolonej, warunki równoważne holomorficzności: równania Cauchy'ego-Riemanna, analityczność i warunek całkowy Cauchy'ego, pojęcie funkcji meromorficznej, twierdzenie o rozwinięciu funkcji meromorficznej w szereg Laurenta, twierdzenie o residuach, zastosowania twierdzenia o residuach do obliczania całek niewłaściwych;
- wybrane równania fizyki matematycznej: równanie Laplace'a i Poissona, równanie falowe, równanie transportu ciepła, równanie dyfuzji, zagadnienie Sturm-Louville'a; interpretację fizyczną i uzasadnienie tych równań; zagadnienie początkowe i zagadnienie brzegowe.
- relację ortogonalności w przestrzeni  $L_2$ , pojęcie szeregu trygonometrycznego, szereg Fouriera funkcji rzeczywistej, wzory na współczynniki w szeregu Fouriera, nierówność Bessela, tożsamość Parsewala, twierdzenia o zbieżności szeregu Fouriera, zastosowania szeregów Fouriera do obliczania sum szeregów liczbowych, zastosowania do rozwiązywania równań różniczkowych (m.in. równania falowego)
- definicję transformaty Fouriera dla funkcji całkowalnej, wzory i metody obliczania transformat Fouriera dla wybranych funkcji, własności transformacji Fouriera jako operatora na przestrzeni  $L_2$ , określenie transformaty odwrotnej, związki transformaty Fouriera z różniczkowaniem i splotem funkcji, zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych
- pojęcie rozwiązania podstawowego równania różniczkowego, definicję funkcji Greena, zastosowanie w rozwiązywaniu równania Poissona i równania dyfuzji
- pojęcia ciała i sigma-ciała zbiorów, przestrzeni mierzalnej, funkcji mierzalnej, miary; konstrukcję całki z rzeczywistej funkcji mierzalnej względem miary i jej własności; twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i o zbieżności ograniczonej, lemat Fatou; pojęcie zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue'a w przestrzeni euklidesowej i pojęcie miary Lebesgue'a; określenie przestrzeni  $L_p$  dla dowolnej przestrzeni mierzalnej i ich własności.
- określenie operatora różniczkowego i jego własności; klasyfikację operatorów różniczkowych drugiego rzędu; postać kanoniczną operatora różniczkowego; operator Laplace'a; określenie operatora całkowego i jego własności; pojęcie jądra operatora całkowego; operator Fredholma.
- sformułowanie zagadnienia własnego dla operatora; pojęcia funkcji własnej i wartości własnej; metodę wyznaczania funkcji i wartości własnych dla

	<p>wybranych operatorów różniczkowych i całkowych (m. in. operatora Laplace'a, Sturma-Liouville'a)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• pojęcie rozmaitości różniczkowej, mapy i atlasu na rozmaitości; definicje przestrzeni stycznej i kostycznej do rozmaitości, wiązki stycznej i wiązki kostycznej; twierdzenie Whitney'a o zanurzeniu; definicje rozmaitości orientowalnej i nieorientowalnej, z brzegiem i bez brzegu; pojęcie dyfeomorfizmu i funkcji gładkiej na rozmaitości; pojęcie pola wektorowego i jego własności</li> <li>• konstrukcję iloczynu tensorowego i iloczynu zewnętrznego przestrzeni wektorowych; definicję <math>k</math>-formy różniczkowej, iloczynu zewnętrznego form różniczkowych i pochodnej formy różniczkowej; pojęcie formy zamkniętej i zupełnej; konstrukcję całki z formy różniczkowej na rozmaitości z brzegiem i bez brzegu; twierdzenie Stokesa i jego zastosowania fizyczne</li> </ul>
	<p><b>Umiejętności</b></p> <p>Student potrafi:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• rozpoznawać własności topologiczne podzbiorów płaszczyzny zespolonej, badać ciągłość funkcji o dziedzinie zespolonej; badać holomorficzność funkcji zespolonej z definicji i z wykorzystaniem wzorów Cauchy'ego-Riemanna; obliczać całki krzywoliniowe z funkcji zespolonych; obliczać pochodne z funkcji zespolonych, rozwijać je w szereg potęgowy i wyznaczać promień zbieżności tego szeregu; badać typ punktu osobliwego i rozwijać funkcję meromorficzną w szereg Laurenta; obliczać residua; stosować twierdzenie o reszduach do obliczania całek niewłaściwych z funkcji rzeczywistych</li> <li>• wyprowadzić i przedstawić interpretację fizyczną podstawowych równań fizyki matematycznej; prawidłowo sformułować zagadnienie początkowo i zagadnienie brzegowe</li> <li>• zortogonalizować liniowo niezależny układ funkcji z <math>L_2</math>; wyznaczać współczynniki Fouriera funkcji rzeczywistej, rozwijać funkcję w szereg Fouriera i określać jego zbieżność; obliczać sumy wybranych szeregów liczbowych korzystając z tożsamości Parsewala; wyjaśnić metodę Fouriera rozwiązywania równania falowego</li> <li>• obliczać transformatę Fouriera i transformatę odwrotną dla wybranych funkcji; stosować transformatę Fouriera do rozwiązywania wybranych równań różniczkowych</li> <li>• wyznaczać rozwiązania podstawowe wybranych równań różniczkowych; stosować metodę funkcji Greena</li> <li>• uzasadnić proste własności sigma-ciał i funkcji mierzalnych; obliczać z definicji całki z funkcji prostych względem dowolnej miary, stosować twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności w prostych rozumowaniach; uzasadnić, że <math>L_p</math> są przestrzeniami liniowymi</li> <li>• rozpoznać typ operatora różniczkowego 2-go rzędu i sprowadzić go do postaci kanonicznej; wykorzystywać własności funkcji harmonicznych w prostych wnioskowaniach; wykonywać obliczenia dla operatorów całkowych</li> <li>• wyznaczać funkcje i wartości własne dla wybranych operatorów różniczkowych i całkowych</li> <li>• opisać atlas dla prostych rozmaitości 2-wymiarowych; obliczać pochodne dla funkcji na rozmaitościach; obliczać iloczyn zewnętrzny, pochodne form różniczkowych; całkować formy różniczkowe na rozmaitościach 2- i 3-wymiarowych; wykorzystać całkowanie form do obliczeń geometrycznych; stosować wzór Stokesa, wyjaśnić związek z poznanym wcześniej twierdzeniem dotyczącym powierzchni 2-wymiarowych.</li> </ul>
	<p><b>Kompetencje społeczne (postawy)</b></p>
<p><b>Kontakt</b></p> <p>szczygielski.krzysztof@gmail.com</p>	