

## Zagadnienia na egzamin licencjacki 2024/2025 dla MMAD

Na egzaminie licencjackim dla kierunku **Modelowanie matematyczne i analiza danych**, ustalona została zasada:

**DWA PYTANIA** z poniższego zestawu zagadnień oraz **JEDNO PYTANIE** z zagadnień omawianych na seminarium licencjackim

lub (w przypadku braku prowadzącego seminarium w składzie komisji)

**TRZY PYTANIA** z poniższego zestawu zagadnień.

### Analiza matematyczna

1. Granica ciągu liczbowego, definicja liczby  $e$ , twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
2. Definicja zbieżności szeregu liczbowego,  $n$ -ta suma częściowa,  $n$ -ta reszta.
3. Kryteria zbieżności szeregów.
4. Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie (w różnych przypadkach – skończonych i nieskończonych).
5. Definicje Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie.
6. Własności funkcji ciągłych określonych na przedziale domkniętym.
7. Pochodna w punkcie funkcji jednej zmiennej. Różniczkowalność a ciągłość.
8. Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych.
9. Pochodna złożenia, pochodna funkcji odwrotnej.
10. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego.
11. Reguła de l'Hospitala.
12. Twierdzenie Taylora.
13. Ciągi funkcyjne. Zbieżność punktowa a zbieżność jednostajna ciągów funkcyjnych.
14. Szeregi funkcyjne. Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej.
15. Szeregi potęgowe. Promień zbieżności, przedział zbieżności.
16. Szereg Taylora, szereg Maclaurina. Funkcje rozwijalne w szereg potęgowy.
17. Całka nieoznaczona funkcji ciągłej. Podstawowe metody całkowania.
18. Konstrukcja całki Riemanna. Całki niewłaściwe.
19. Zbieżność ciągów, zbiory domknięte i otwarte w przestrzeni euklidesowej.
20. Własności funkcji ciągłych na zbiorach zwartych w przestrzeniach euklidesowych.
21. Pochodna funkcji wielu zmiennych w punkcie. Pochodna a ciągłość funkcji.
22. Pochodne cząstkowe. Związek między pochodną a pochodnymi cząstkowymi.
23. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Twierdzenie Schwarz'a.
24. Warunki konieczny i dostateczny dla ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych.
25. Twierdzenie Fubiniego dla całki Riemanna na płaszczyźnie.
26. Twierdzenie o zamianie zmiennych w całce Riemanna funkcji wielu zmiennych.

### Algebra liniowa

1. Ciało liczb zespolonych. Interpretacja geometryczna i postać trygonometryczna liczby zespolonej.
2. Układy równań liniowych i sposoby ich rozwiązywania.
3. Macierze i działania na nich.
4. Pojęcie przestrzeni liniowej nad ciałem.
5. Liniowa niezależność wektorów, baza i wymiar przestrzeni liniowej.
6. Rząd macierzy. Metody obliczania rzędu i zastosowania.
7. Wyznacznik macierzy. Własności i zastosowania wyznaczników.
8. Odwzorowania liniowe. Jądro i obraz. Macierz odwzorowania.
9. Wartości i wektory własne. Wielomian charakterystyczny.

10. Symetryczne odwzorowania dwuliniowe i stowarzyszone z nimi formy kwadratowe. Określoność formy kwadratowej. Iloczyn skalarny.
11. Przestrzenie euklidesowe. Kąt między wektorami, norma, odległość.
12. Bazy ortogonalne. Ortogonalizacja Grama-Schmidta.
13. Pojęcie grupy. Definicja i przykłady, podgrupa, twierdzenie Lagrange'a.

### **Matematyka dyskretna**

1. Systemy liczbowe. System binarny i operacje arytmetyczne w nim.
2. Zliczanie obiektów kombinatorycznych (wariacje z powtórzeniami i bez, permutacje, kombinacje).
3. Zasada włączania i wyłączania (wersja ogólna). Zasada szufladkowa Dirichleta.
4. Podzielność liczb. Relacja kongruencji. Algorytm Euklidesa.
5. Grafy nieskierowane i skierowane. Drzewa. Grafy eulerowskie i hamiltonowskie.

### **Algorytmy i struktury danych**

1. Podstawowe struktury danych: stos, kolejka, lista.
2. Kopce binarne, ich zastosowania i złożoność podstawowych operacji.
3. Struktury danych oparte na drzewach.
4. Drzewa poszukiwań binarnych, podstawowe operacje i ich złożoność.
5. Algorytmy sortujące i ich złożoność czasowa.
6. Metody konstruowania algorytmów: dziel i zwyciężaj, programowanie dynamiczne, strategia zachłanna.

### **Rachunek prawdopodobieństwa**

1. Przestrzeń probabilistyczna.
2. Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór Bayesa i wzór na prawdopodobieństwo całkowite.
3. Schemat Bernoulliego i rozkład dwumianowy.
4. Rozkład normalny i reguła 3 sigm.
5. Zmienna losowa, dystrybuanta i rodzaje rozkładów prawdopodobieństwa.
6. Wartość oczekiwana, wariancja i nierówność Czebyszewa.
7. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych.
8. Prawo wielkich liczb.
9. Centralne twierdzenie graniczne.

### **Statystyka**

1. Dystrybuanta empiryczna i histogram próby losowej.
2. Średnia i wariancja empiryczna próby losowej.
3. Mediana i kwartyle próby losowej.
4. Rozkłady chi-kwadrat, t-Studenta, F-Snedecora i ich związek z rozkładem normalnym.
5. Model statystyczny.
6. Estymatory nieobciążone, zgodne i efektywne.
7. Lemat Neymana-Pearsona.
8. Estymatory punktowe dla wartości oczekiwanej i wariancji próby losowej prostej.
9. Testowanie parametrów modeli statystycznych z przykładami.
10. Metoda najmniejszych kwadratów i jej zastosowanie w statystyce.
11. Regresja liniowa prosta i wieloraka. Przykłady.
12. Estymatory największej wiarygodności (MLE) w regresji liniowej.
13. Analiza wariancji jedno- i dwuczynnikowa.

