KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Nazwa przedmiotu

Metody matematyczne fizyki I

Kod ECTS

13.2.0314

Nazwa jednostki prowadzącej przedmiot

Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki

Studia

wydział	kierunek		
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki	Fizyka	poziom	pierwszego stopnia
		forma	stacjonarne
		moduł specjalnościowy	fizyka
		specjalizacja	wszystkie

Nazwisko osoby prowadzącej (osób prowadzących)

prof. UG, dr hab. Marcin Marciniak; dr Krzysztof Szczygielski; dr Maciej Kuna

Formy zajęć, sposób ich realizacji i przypisana im liczba godzin

Formy zajęć

Wykład, Ćw. audytoryjne

Sposób realizacji zajęć

zajęcia w sali dydaktycznej

Liczba godzin

Ćw. audytoryjne: 30 godz., Wykład: 30 godz.

Liczba punktów ECTS

6

Przedmiot w wymiarze 30h wykładu i 30h ćwiczeń + praca własna studenta

Termin realizacji przedmiotu

2020/2021 zimowy

Status przedmiotu

obowiązkowy

Język wykładowy

polski

Metody dydaktyczne

- Rozwiązywanie zadań
- praca własna - przygotowanie się do egzaminu
- praca własna - rozwiązywanie zadań

Forma i sposób zaliczenia oraz podstawowe kryteria oceny lub wymagania egzaminacyjne

Sposób zaliczenia

- Zaliczenie na ocenę
- Egzamin

Formy zaliczenia

- egzamin ustny
- egzamin pisemny z pytaniami (zadaniami) otwartymi
- kolokwium
- Wykład - egzamin
  Ćwiczenia - zaliczenie na ocenę

Podstawowe kryteria oceny

Egzamin: Uzyskanie min. 50% punktów z egzaminu pisemnego lub poprawna odpowiedź na 2 pytania z trzech na egzaminie ustnym.
Ćwiczenia: Uzyskanie min. 50% punktów z kolokwium zaliczeniowego.

Sposób weryfikacji założonych efektów kształcenia

zakładany efekt kształcenia	Egzamin	Kolokwium	mtd. dydakt 3	mtd. dydakt 4	mtd. dydakt 5	mtd. dydakt 6	mtd. dydakt 7	mtd. dydakt 8
	Wiedza							
K_W02	+	+						
K_W04	+	+						
	Umiejętności							
K_Uo8	+	+						

Określenie przedmiotów wprowadzających wraz z wymogami wstępnymi

A. Wymagania formalne

Zaliczone przedmioty:

1. Analiza matematyczna - 1 i 2 sem.,
2. Algebra liniowa z geometrią - 1 i 2 sem.

B. Wymagania wstępne

Znajomość następujących pojęć i zagadnień:

1. Funkcje elementarne: funkcja potęgowa, wielomian, funkcja wymierna, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne i funkcje cyklometryczne. Złożenie funkcji. Funkcja odwrotna.
2. Granica ciągu liczbowego. Twierdzenia dotyczące granic: twierdzenie o trzech ciągach, twierdzenie o ciągach monotonicznych i ograniczonych. Liczba e
3. Granica funkcji rzeczywistej w punkcie; definicja Heinego i Cauchy'ego. Granice jednostronne funkcji w punkcie, granice niewłaściwe. Ciągłość funkcji w punkcie; funkcja ciągła. Własności funkcji ciągłych: własność Darboux, twierdzenie Weierstrassa. Asymptota pionowa i pozioma.
4. Iloraz różnicowy; różniczkowalność funkcji w punkcie; pochodna; funkcja różniczkowalna. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Wzory na pochodną sumy, iloczynu i ilorazu funkcji; wzór na pochodną funkcji złożonej. Własności funkcji różniczkowalnych: ciągłość, twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Związki między pochodną a ekstremami lokalnymi i monotonicznością. Różniczka zupełna.
5. Pochodne wyższych rzędów; funkcja n-krotnie różniczkowalna; funkcja gładka. Związki między drugą pochodną a kształtem wykresu. Twierdzenie Taylora; wzór Taylora i reszta we wzorze Taylora.
6. Szereg liczbowy; zbieżność szeregu liczbowego. Kryteria zbieżności szeregów liczbowych. Szereg potęgowy; promień zbieżności szeregu potęgowego; wzór Cauchy'ego-Hadamarda. Szereg Taylora funkcji gładkiej.
7. Całka Riemanna, sumy riemannowskie. Funkcja pierwotna. Twierdzenie Newtona-Leibniza. Całka nieoznaczona i oznaczona. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej. Metody całkowania funkcji jednej zmiennej: przez części, przez podstawianie, całkowanie funkcji wymiernych, całkowanie funkcji wymiernych od funkcji trygonometrycznych, podstawienia Eulera. Zastosowania geometryczne i fizyczne całki oznaczonej.
8. Funkcje wielu zmiennych. Ciągłość funkcji wielu zmiennych. Różniczkowalność, pochodna i pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych. Twierdzenie o funkcji uwikłanej. Warunki konieczne i równoważne istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych. Ekstremum warunkowe; metoda mnożników Lagrange'a.
9. Całkowanie funkcji wielu zmiennych. Całka iterowana; twierdzenie Fubiniego. Jakobian, twierdzenie o zamianie zmiennych w całce wielokrotnej. Całka krzywoliniowa niezorientowana i zorientowana; twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną; interpretacja geometryczna i fizyczna całek krzywoliniowych. Całka powierzchniowa niezorientowana i zorientowana; twierdzenie o zamianie całki powierzchniowej na całkę podwójną; interpretacja geometryczna i fizyczna całek powierzchniowych. Pole gradientowe; dywergencja i rotacja pola wektorowego. Twierdzenie Ostrogradzkiego-Gaussa, twierdzenie Greena, twierdzenie Stokesa.
10. Liczby zespolone; płaszczyzna zespolona. Część rzeczywista, część urojona, moduł, sprzężenie i argument liczby zespolonej. Działania na liczbach zespolonych. Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Wzór de Moivre'a; wzór na pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej.
11. Układ równań liniowych. Macierz podstawowa i rozszerzona układu równań. Operacje elementarne na wierszach macierzy. Wyznacznik macierzy; rząd macierzy. Macierz odwracalna; macierz odwrotna. Twierdzenie Craméra. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego; metoda eliminacji Gaussa.
12. Przestrzeń liniowa. Liniowa niezależność układu wektorów; układ generujący; baza przestrzeni liniowej. Rozwinięcie wektora względem bazy. Macierz zmiany bazy.
13. Przekształcenie liniowe. Macierz przekształcenia liniowego. Wyznacznik macierzy; rząd macierzy. Macierz odwracalna, macierz symetryczna, macierz hermitowska.

Umiejętności:

1. Szkicowanie wykresów funkcji elementarnych i ich przekształcanie. Określanie dziedziny. Badanie różnowartościowości i odwracalności funkcji. Wyznaczanie funkcji odwrotnej do funkcji zadanej wzorem.
2. Obliczanie granic ciągów.
3. Obliczanie granic funkcji w punkcie. Badanie ciągłości funkcji. Wyznaczanie asymptot.
4. Obliczanie pochodnej z definicji. Obliczanie pochodnych na podstawie wzorów na pochodną sumy, iloczynu, ilorazu i złożenia funkcji. Wyznaczanie ekstremów lokalnych i przedziałów monotoniczności; wyznaczanie wartości ekstremalnych w przedziale domkniętym.
5. Obliczanie pochodnych wyższych rzędów. Obliczanie współczynników w rozwinięciu Taylora dla funkcji n-krotnie różniczkowalnej.
6. Badanie zbieżności szeregów za pomocą kryteriów zbieżności. Wyznaczanie promienia zbieżności szeregu potęgowego; badanie zbieżności na końcach przedziału zbieżności. Rozwijanie funkcji w szereg Taylora i wyznaczanie jego promienia zbieżności.
7. Obliczanie całek nieoznaczonych i oznaczonych. Stosowanie ich do rozwiązywania problemów geometrycznych i fizycznych.
8. Badanie ciągłości funkcji wielu zmiennych. Badanie różniczkowalności funkcji wielu zmiennych; obliczanie pochodnych cząstkowych. Wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych.
9. Obliczanie całek funkcji wielu zmiennych; zamiana całki po obszarze na całkę iterowaną. Korzystanie ze współrzędnych biegunowych. Obliczanie całek krzywoliniowych i powierzchniowych. Korzystanie z twierdzeń Greena, Ostrogradzkiego-Gaussa i Stokesa.
10. Wykonywanie działań na liczbach zespolonych. Wyznaczanie postaci trygonometrycznej dla liczby zespolonej; obliczanie potęg i pierwiastków z liczb zespolonych. Rozwiązywanie równań wielomianowych o współczynnikach zespolonych.

11. Obliczanie wyznacznika i rzędu macierzy; wyznaczanie macierzy odwrotnej. Badanie rozwiązalności układów równań. Stosowanie wzorów Craméra i metody eliminacji Gaussa.
12. Badanie liniowej niezależności układu wektorów; wyznaczanie podprzestrzeni generowanej przez układ wektorów. Badanie, czy układ wektorów jest bazą przestrzeni liniowej. Rozwijanie wektora względem bazy.
13. Badanie liniowości przekształcenia. Wyznaczanie macierzy przekształcenia liniowego w bazach.

Cele kształcenia

Zapoznanie z technikami matematyki wyższej w zakresie niezbędnym do opisu zjawisk fizycznych i rozwiązywania problemów fizycznych.

Treści programowe

1. Elementy teorii funkcji zespolonych.
2. Szereg Laurenta, residua i obliczanie całek za ich pomocą.
3. Wybrane równania fizyki matematycznej.
4. Szeregi i całki Fouriera, wielomiany ortogonalne.
5. Transformacja Fouriera i jej zastosowania.
6. Technika funkcji Greena dla wybranych równań fizyki matematycznej.
7. Elementy teorii miary i całka Lebesgua.
8. Operatory różniczkowe i całkowe.
9. Zagadnienie własne dla operatorów. Przykłady.
10. Rozmaitości różniczkowalne.
11. Formy różniczkowe i ich całkowanie.

Wykaz literatury

F. Leja, Funkcje zespolone, PWN 1973
W. A. Majewski, Matematyczne metody fizyki, UG 1989
F.W. Byron, R.W. Fuller, Matematyka w fizyce klasycznej i kwantowej , t. 1, 2, PWN 1975
M. Spivak, Analiza na rozmaitościach, PWN 1977
W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona, PWN 1998

Kierunkowe efekty kształcenia	Wiedza
K_W02 rozumie rolę eksperymentu fizycznego, matematycznych modeli teoretycznych przybliżających rzeczywistość oraz symulacji komputerowych w metodologii badań naukowych; ma świadomość ograniczeń technologicznych, aparaturowych i metodologicznych w badaniach naukowych K_W04 zna podstawowe techniki matematyki wyższej, w tym rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej i wielu zmiennych, oraz podstawy algebry w zakresie niezbędnym do opisu zjawisk fizycznych i rozwiązywania problemów fizycznych K_U08 potrafi posługiwać się aparatem matematycznym i metodami numerycznymi do opisu i modelowania zjawisk i procesów fizycznych	Student zna: • podstawowe własności topologiczne płaszczyzny zespolonej, pojęcie fukcji holomorficznej, pojęcie całki krzywoliniowej z funkcji zespolonej, warunki równoważne holomorficzności: równania Cauchy'ego-Riemanna, analityczność i warunek całkowy Cauchy'ego, pojęcie funkcji meromorficznej, twierdzenie o rozwinięciu funkcji meromorficznej w szereg Laurenta, twierdzenie o residuach, zastosowania twierdzenia o residuach do obliczania całek niewłaściwych; • wybrane równania fizyki matematycznej: równanie Laplace'a i Poissona, równanie falowe, równanie transportu ciepła, równanie dyfuzji, zagadnienie Sturma-Louville'a; interpretację fizyczną i uzasadnienie tych równań; zagadnienie początkowe i zagadnienie brzegowe. • relację ortogonalności w przestrzeni L_2, pojęcie szeregu trygonometrycznego, szereg Fouriera funkcji rzeczywistej, wzory na współczynniki w szeregu Fouriera, nierówność Bessela, tożsamość Parsevala, twierdzenia o zbieżności szeregu Fouriera, zastosowania szeregów Fouriera do obliczania sum szeregów liczbowych, zastosowania do rozwiązywania równań różniczkowych (m.in. równania falowego) • definicję transformaty Fouriera dla funkcji całkowalnej, wzory i metody obliczania transformat Fouriera dla wybranych funkcji, własności transformacji Fouriera jako operatora na przestrzeni L_2, określenie transformaty odwrotnej, związki transformaty Fouriera z różniczkowaniem i splotem funkcji, zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych • pojęcie rozwiązania podstawowego równania różniczkowego, definicję funkcji Greena, zastosowanie w rozwiązywaniu równania Poissona i równania dyfuzji • pojęcia ciała i sigma-ciała zbiorów, przestrzeni mierzalnej, funkcji mierzalnej, miary; konstrukcję całki z rzeczywistej funkcji mierzalnej względem miary i jej własności; twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i o zbieżności ograniczonej, lemat Fatou; pojęcie zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue'a w przstrzenie euklidesowej i pojęcie miary Lebesgue'a; określenie przestrzeni L_p dla dowolnej przstrzeni mierzalnej i ich własności. • określenie opretaora różniczkowego i jego własności; klasyfikację operatorów różniczkowych drugiego rzędu; postać kanoniczną operatora różniczkowego; operator Laplace'a; określenie operatora całkowego i jego własności; pojęcie

jądra operatora całkowego; operator Fredholma.
- sformułowanie zagadnienia własnego dla operatora; pojęcia funkcji własnej i wartości własnej; metodę wyznaczania funkcji i wartości własnych dla wybranych operatorów rózniczkowych i całkowych (m. in. operatora Laplace'a, Sturma-Liouville'a)
- pojęcie rozmaitości różniczkowej, mapy i atlasu na rozmaitości; definicję przestrzeni stycznej i kostycznej do rozmaitości, wiązki stycznej i wiązki kostycznej; twierdzenie Whitney'a o zanurzeniu; definicje rozmaitości orientowalnej i nieorientowalnej, z brzegiem i bez brzegu; pojęcie dyfeomorfizmu i funkcji gładkiej na rozmaitości; pojęcie pola wektorowego i jego własności
- konstrukcję iloczynu tensorowego i iloczynu zewnętrznego przestrzeni wektorowych; definicję *k*-formy różniczkowej, iloczunu zewnętrznego form różniczkowych i pochodnej formy różniczkowej; pojęcie formy zamkniętej i zupełnej; konstrukcję całki z formy różniczkowej na rozmaitości z brzegiem i bez brzegu; twierdzenie Stokesa i jego zastosowania fizyczne

Umiejętności

Student potrafi:

- rozpoznawać własności topologiczne podzbiorów płaszczyzny zespolonej, badać ciągłość funkcji o dziedzinie zespolonej; badać holomorficzność funkcji zespolonej z definicji i z wykorzystaniem wzorów Cauchy'ego-Riemanna; obliczać całki krzywoliniowe z funkcji zespolonych; obliczać pochodne z funkcji zespolonych, rozwijać je w szereg potęgowy i wyznaczać promień zbieżności tego szeregu; badać typ punktu osobliwego i rozwijać funkcję meromorficzną w szereg Laurenta; obliczać residua; stosować twierdzenie o residuach do obliczania całek niewłaściwych z funkcji rzeczywistych
- wyprowadzić i przedstawić interpretację fizyczną podstawowych równań fizyki matematycznej; prawidłowo sformułować zagadnienie początkowo i zagadnienie brzegowe
- zortogonalizować liniowo niezależny układ funkcji z L_2; wyznaczać współczynniki Fouriera funkcji rzeczywistej, rozwijać funkcję w szereg Fouriera i określać jego zbieżność; obliczać sumy wybranych szeregów liczbowych korzystając z tożsamości Parsevala; wyjaśnić metodę Fouriera rozwiązywania równania falowego
- obliczać transformatę Fouriera i transformatę odwrotną dla wybranych funkcji; stosować transformatę Fouriera do rozwiązywania wybranych równań różniczkowych
- wyznaczać rozwiązania podstawowe wybranych równań różniczkowych; stosować metodę funkcji Greena
- uzasadnić proste własności sigma-ciał i funkcji mierzalnych; obliczać z definicji całki z funkcji prostych względem dowolnej miary, stosować twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności w prostych rozumowaniach; uzasadnić, że L_p są przestrzeniami liniowymi
- rozpoznać typ operatora różniczkowego 2-go rzędu i sprowadzić go do postaci kanonicznej; wykorzystywać własności funkcji harmonicznych w prostych wnioskowaniach; wykonywać obliczenia dla operatorów całkowych
- wyznaczać funkcje i wartości własne dla wybranych operatorów różniczkowych i całkowych
- opisać atlas dla prostych rozmaitości 2-wymiarowych; obliczać pochodne dla funkcji na rozmaitościach; obliczać iloczyn zewnętrzny, pochodne form różniczkowych; całkować formy różniczkowe na rozmaitościach 2- i 3-wymiarowych; wykorzystać całkowanie form do obliczeń geometrycznych; stosować wzór Stokesa, wyjaśnić związek z poznanym wcześniej twierdzeniem dotyczącym powierzchni 2-wymiarowych.

Kompetencje społeczne (postawy)

Kontakt

matmm@univ.gda.pl