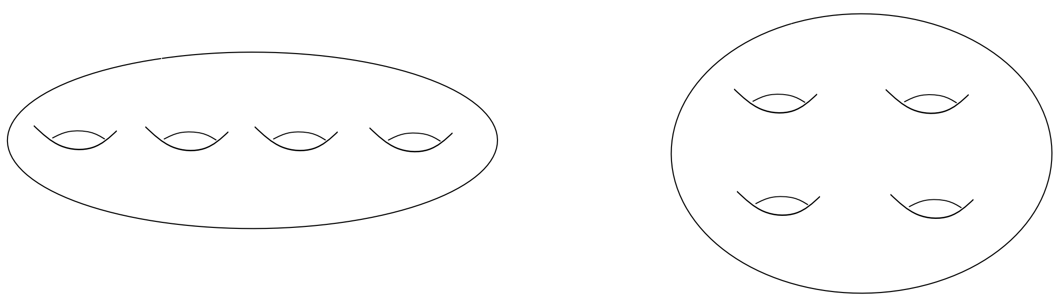
Własności ekstremalnych powierzchni Riemanna

Badania nad grupami automorfizmów i symetriami powierzchni Riemanna, czyli powierzchni topologicznych wyposażonych w strukturę analityczną, zapoczątkowane zostały w klasycznych pracach z XIX wieku. Tematyka ta dotyczy ważnych dziedzin matematyki, takich jak geometria algebraiczna, teoria funkcji zmiennej zespolonej, niskowymiarowa topologia oraz kombinatoryczna teoria grup i teoria Galois, z punktu widzenia używanych technik. Z punktu widzenia geometrii algebraicznej, każdej zwartej powierzchni Riemanna odpowiada pewna rzutowa zespolona krzywa algebraiczna - a skoro mamy krzywą, to nasza powierzchnia może być opisana za pomocą równań wielomianowych o współczynnikach zespolonych. Jeśli dodatkowo nasza powierzchnia posiada symetrię, to współczynniki w naszych równaniach stają się rzeczywiste. Niestety, metody geometrii algebraicznej nie pozwalają w łatwy sposób badać własności powierzchni Riemanna i ich symetrii, i z pomocą przychodzi tutaj kombinatoryczna teoria grup, a w szczególności *nieeuklidesowe grupy krystalograficzne*.

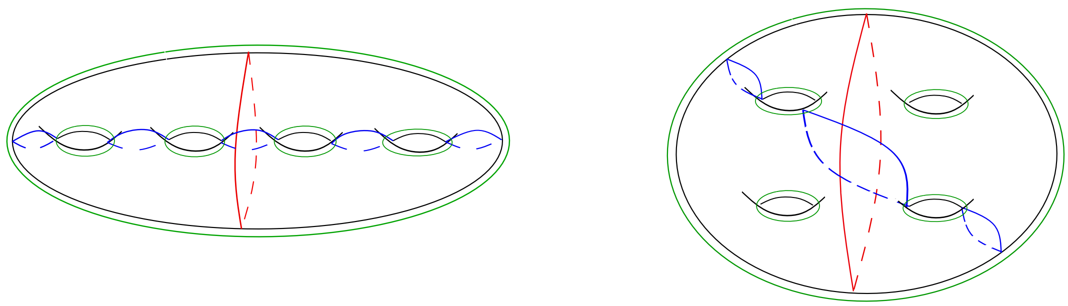
Wyobraźmy sobie donata - powierzchnię amerykańskiego pączka, jednak zamiast jednej „dziury", niech nasz pączek ma ich więcej, powiedzmy g „dziur". Oczywiście „dziury" możemy układać w dowolny sposób. W szczególności, możemy je układać bardziej lub mniej „symetrycznie". Otrzymujemy w ten sposób pewną powierzchnię topologiczną, a liczbę „dziur" g nazwiemy *rodzajem* tej powierzchni. Na poniższym rysunku widzimy dwie przykładowe powierzchnie rodzaju 4.



Rysunek 1. Dwie powierzchnie rodzaju 4

Oczywiście, z punktu widzenia topologii powierzchnie te są identyczne - za pomocą zgniatania i rozciągania możemy bez problemu przekształcić jedną z nich w drugą, i odwrotnie. Z drugiej jednak strony widać, że rysunki powyższe są „różne", w szczególności są różnią się „symetrią". Wyposażając taką powierzchnię topologiczną w tzw. strukturę analityczną, otrzymamy dużo ciekawszy obiekt, zwany *zwartą powierzchnią Riemanna*. Dla takiej powierzchni możemy rozważać jej grupę automorfizmów, a *symetrią* nazwiemy automorfizm rzędu 2, który dodatkowo jest elementem odwracającym orientację w naszej grupie.

Przyjrzyjmy się symetriom naszych powierzchni z poprzedniego rysunku. Okazuje się, że każdej symetrii można przyporządkować pewną liczbę całkowitą, zwaną jej *typem topologicznym*. Jeśli popatrzymy bowiem na zbiór punktów stałych symetrii, będzie on homeomorficzny ze zbiorem $k \leqslant g+1$ okręgów - zwanych owalami. Na rysunku 2. po lewej stronie widzimy symetrie o 5 (zielony), 5 (niebieski) i 1 (czerwony) owalu, zaś po prawej stronie symetrie o 5 (zielony), 3 (niebieski) i 1 (czerwony)



Rysunek 2. Symetrie i ich owale

owalu. Zauważmy też, że każda z naszych symetrii ma tę własność, że rozcina naszą powierzchnię na dwa osobne kawałki. Symetrie takie nazywamy *rozdzielającymi* - ich typ topologiczny to $+k$. Istnieją też, co o wiele trudniej sobie wyobrazić, symetrie nierozdzielające i ich typ topologiczny to $-k$ - w szczególności istnieją również symetrie typu 0, które w ogóle nie posiadają punktów stałych. Na rysunku 2. widzimy więc powierzchnię o typie symetrii $\{+5, +5, +1, 0\}$ (po lewej stronie) oraz powierzchnię o typie symetrii $\{+5, +3, +1, 0\}$ (po prawej stronie).

Można teraz zadać sobie dwa pytania:

- Ile niesprzężonych symetrii może maksymalnie posiadać powierzchnia Riemanna rodzaju g?

- Ile maksymalnie owali może posiadać zbiór k niesprzężonych symetrii na powierzchni Riemanna rodzaju g?

Odpowiedzi na obydwa te pytania są dobrze poznane w literaturze. Nazwijmy teraz powierzchnie, które posiadają maksymalną liczbę symetrii *s-ekstremalnymi*, zaś te o maksymalnej ilości owali - *o-ekstremalnymi*. Celem moich badań jest jak najlepsze poznanie powierzchni o takich właśnie ekstremalnych własnościach. Okazuje się, że powierzchnie ekstremalne mają grupy automorfizmów o dość prostej strukturze - są to grupy izomorficzne z $D_n \times \mathbb{Z}_2^k$, gdzie D_n oznacza grupę dihedralną rzędu $2n$, zaś $\mathbb{Z}_2$ - grupę cykliczną rzędu 2. Dzięki temu możemy w efektywny sposób badać problemy takie jak:

1. Wyznaczenie wszystkich układów typów toplogicznych symetrii, które realizują się na powierzchniach o-ekstremalnych - na to pytanie znamy już odpowiedź. Naturalną kontynuacją tego pytania jest próba podobnej klasyfikacji powierzchni s-ekstremalnych. Jest to zadanie o wiele trudniejsze, ale prawdopodobnie możliwe do częściowego rozwiązania przy pewnych dodatkowych założeniach, jak np. przyjęciu, że jedna z symetrii posiada maksymalną ilość $g + 1$ owali.

2. Część rzeczywistą $\mathcal{R}_g$ przestrzeni moduli zwartych powierzchni Riemanna rodzaju g możemy pokryć rzeczywistymi rozmaitościami analitycznymi, z których każda składa się z punktów reprezentowanych przez powierzchnie posiadające symetrię typu $\pm k$. Z pokryciem tym stowarzyszamy tzw. *nerw rzeczywisty*, otrzymując w ten sposób kompleks symplicjalny. Powierzchnie s-ekstremalne kontrolują w nerwie sympleksy

maksymalnego wymiaru, zaś powierzchnie o-ekstremalne będą pomocne w wyznaczeniu liczb Bettiego czy znalezieniu ewentualnych elementów torsyjnych w grupach homologii.

3. Wyznaczenie równań rzeczywistych powierzchni o-ekstremalnych. W ogólności poszukiwanie równań rzeczywistych dla symetrycznych powierzchni Riemanna jest bardzo trudne, jednak - dzięki wspomnianej już nieskomplikowanej strukturze grupy automorfizmów dla powierzchni ekstremalnych - staje się możliwe za pomocą metod teorii Galois. Zadanie to udało się juz zrealizować dla powierzchni o-ekstremalnych o abelowej grupie automorfizmów - czyli przykładowo dla powierzchni po lewej stronie na rysunku 2. Przypadek nieabelowy pozostaje otwarty.

4. Badanie powierzchni guzikowych - powierzchnie parzystego rodzaju posiadają co najwyżej 4 niesprzężone symerie, a ta ciekawa klasa powierzchni parzystego rodzaju powstaje, gdy rozważamy powierzchnie, które są jednocześnie o- oraz s-ekstremalne i mają nieabelową grupę automorfizmów. Najprostszy przypadek powierzchni guzikowej widzimy po prawej stronie na rysunku 2 - jest to powierzchnia rodzaju 4 o typie topologicznym symetrii $\{+5, +3, +1, 0\}$ a jej grupa automorfizmów jest izomorficzna z grupą $D_4 \times \mathbb{Z}_2$.