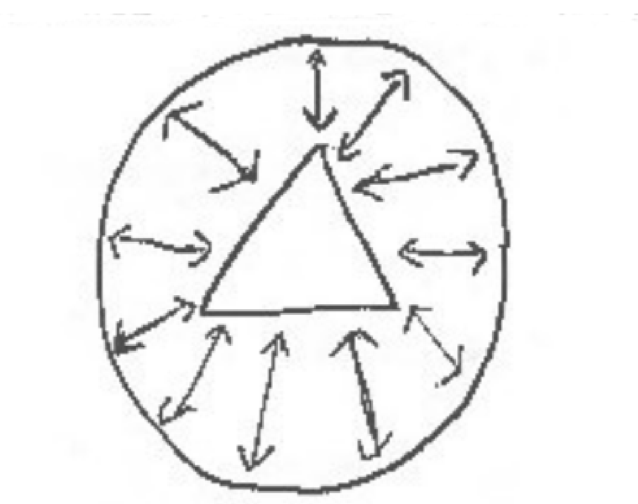
Seminarium licencjackie dla Matematyki

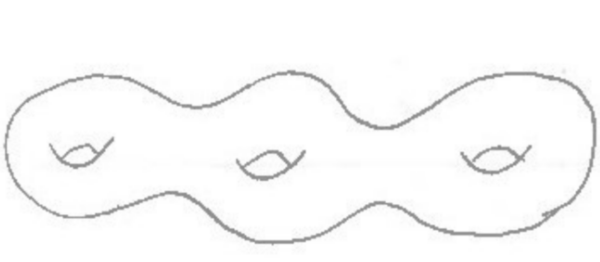
Topologia niskowymiarowa

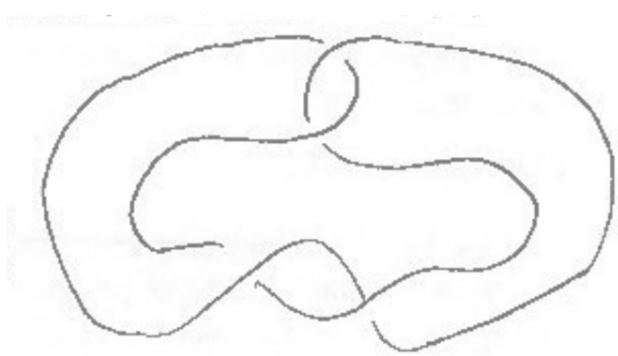
dr hab. Andeas Zastrow, prof. UG

Ogólny opis tematu:

Topologia jest tą częścią matematyki, która bada przestrzenie. Metryzowalne przestrzenie topologiczne (duża większość przestrzeni na tym seminarium będzie metryzowalna) są przestrzeniami metrycznymi, ale tylko z dokładnością do homeomorfizmów, tzn. do ciągłych bijekcji. Dlatego topolodzy nie muszą rozróżniać między okręgami i trójkątami, bo istnieją takie ciągłe odwzorowani między nimi jak na rys. 1. Istotnie, takie standardowe niezmienniki geometryczne jak odległości, kąty, krzywizny nie są niezmiennikami topologicznymi, ale kilka własności jest, na przykład „ilość dziur" w bryłach i ich powierzchniach na rys. 2. Jedny z zadań na naszym seminarium może być próba zrozumienia dlaczego. Brak wystarczającej fantazji żeby skonstruować odpowiedni homeomorfizm nie liczy się jako argument w matematyce, dowód tego faktu zwykle wymaga skonstruowania niezmienników algebraicznych. Interesują nas wymiary dwa i trzy, bo w nich można dość dobrze wyobrażać sobie przestrzenie, jak na przykład powierzchnie z rys. 2, albo trójwymiarową przestrzeń wszystkich punktów, które nie leżą na takiej zawiązanej krzywej jak pokazane na rys. 3. Praca z rysunkami i obrazami jest w tej teorii dość ważna, ale mimo to teoria nie jest trywialna, zawsze trzeba zrozumieć, jakie własności rysunku odpowiadają stałym w algebrze, jakie zmiennym, i jakie nie są własnościami przedstawionej przestrzeni, tylko własnościami konkretnej reprezentacji, np. konkretnego włożenia. Rysunki są tak ważne w tej dziedzinie, bo część teorii węzłów jest czystą kombinatoryką na podstawie diagramów, jak np. rys. 3. Można więc tu znaleźć tematy referatów nawet dla kandydatów bez przygotowania z topologii.







Program seminarium:

To jest prowizoryczny program, dokładny będziemy ustalać na podstawie liczby, zainteresowań i indywidualnego przygotowania uczestników.

Motywacją proponowanego programu jest następująca obserwacja:

Dla każdego wymiaru standardowa sfera rozcina R^n na dwa kawałki, tzw. „wnętrze" i „zewnętrze". To łatwo pokazać jako zastosowanie twierdzenia o wartościach pośrednich. Dodadtkowo, wnętrze sfery jest według definicji dyskiem, i (jak łatwo można pokazać z rzutu stereograficznego) zewnętrze sfery jest homeomorficzne z „dyskiem bez punktu".

Intuicja podpowiada nam, że tak powinno być dla każdej $(n-1)$-wymiarowej sfery zanurzonej w R^n. Jeśli chodzi o własność rozcinania, to jest to prawda – to jest treść twierdzenia Jordana. Ale jeśli chodzi o to, jak muszą wyglądać kawałki po rozcięciu, to nasza naturalna intuicja jest poprawna tylko dla wymiaru dwa (to jest treść twierdzenia Sch onfliesa), ale niekoniecznie dla wymiaru trzy. W wymiarze trzy każda zanurzona sfera jeszcze rozcina przestrzeń, ale na kawałki, które mogą już być niehomeomorficzne z dyskiem lub dyskiem minus punkt.

Celem tego seminanium może być próba zrozumienia odpowiednich wyników w wymiarze dwa, i dlaczego te wyniki nie pozostają prawdziwe, kiedy przechodzimy do wymiaru trzy.

Możliwy podział referatów jest następujący:

1. Twierdzenie Schönfliesa dla łamanych;
2. Dowód, że każda dziedzina Jordana jest jednostajnie lokalnie łukowo spójna;
3. Konstrukcja krzywej rozcięcia dla domkniętych krzywych na płaszczyźnie;
4. Twierdzenie Schönfliesa dla dowolnych ciągłych krzywych;
5. Wprowadzenie pojęcia „Przedstawenia grup", „Iloczyn wolny grup" i „Iloczyn wolny z amalgamacją";
6. Kombinatoryczne wprowadzenie grupy podstawowej;
7. Homotopia dróg i odwzorowań, ściągalność wypukłych przestrzeni;
8. Topologiczne wprowadzenie grupy podstawowej;
9. Zgodność kombinatoricznej i topologicznej definicji grupy podstawowej dla kompleksów;
10. Definicja i nietrywialność zewnętrza sfery rogatej.

Inne uwagi:

Indywidualne życzenia mogę też próbować wbudować w program seminarium. Jeśli państwo w ciągu swoich studiów słyszeli o ciekawych wynikach w matematyce, które państwo chcą lepiej rozumieć, i które pokryją się z moją dziedziną (topologia – łącznie z punktami, gdzie topologia styka się z innymi dziedzinami matematyki, jak kombinatoryka, algebra, analiza, teorii miary, budowanie algorytmów). W tym wypadku proszę o kontaktowanie się z mną wcześniej, najlepiej przed końcem wakacji.