

KOD

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

Próbny egzamin maturalny  
Formuła 2023

MATEMATYKA  
Poziom rozszerzony

---

Data: **19 kwietnia 2024 r.**

Godzina rozpoczęcia: **12:00**

Czas trwania: **180 minut**

Liczba punktów do uzyskania: **50**

Wydział



Uniwersytetu Gdańskiego

**Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym**

1. Sprawdź, czy przekazano Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
  2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz - natychmiast to zgłoś.
  3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz - otwórz arkusz po otrzymaniu takiego polecenia. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.
-

## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 24 strony (zadania 1–13).
2. Na pierwszej stronie arkusza wpisz swój kod.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

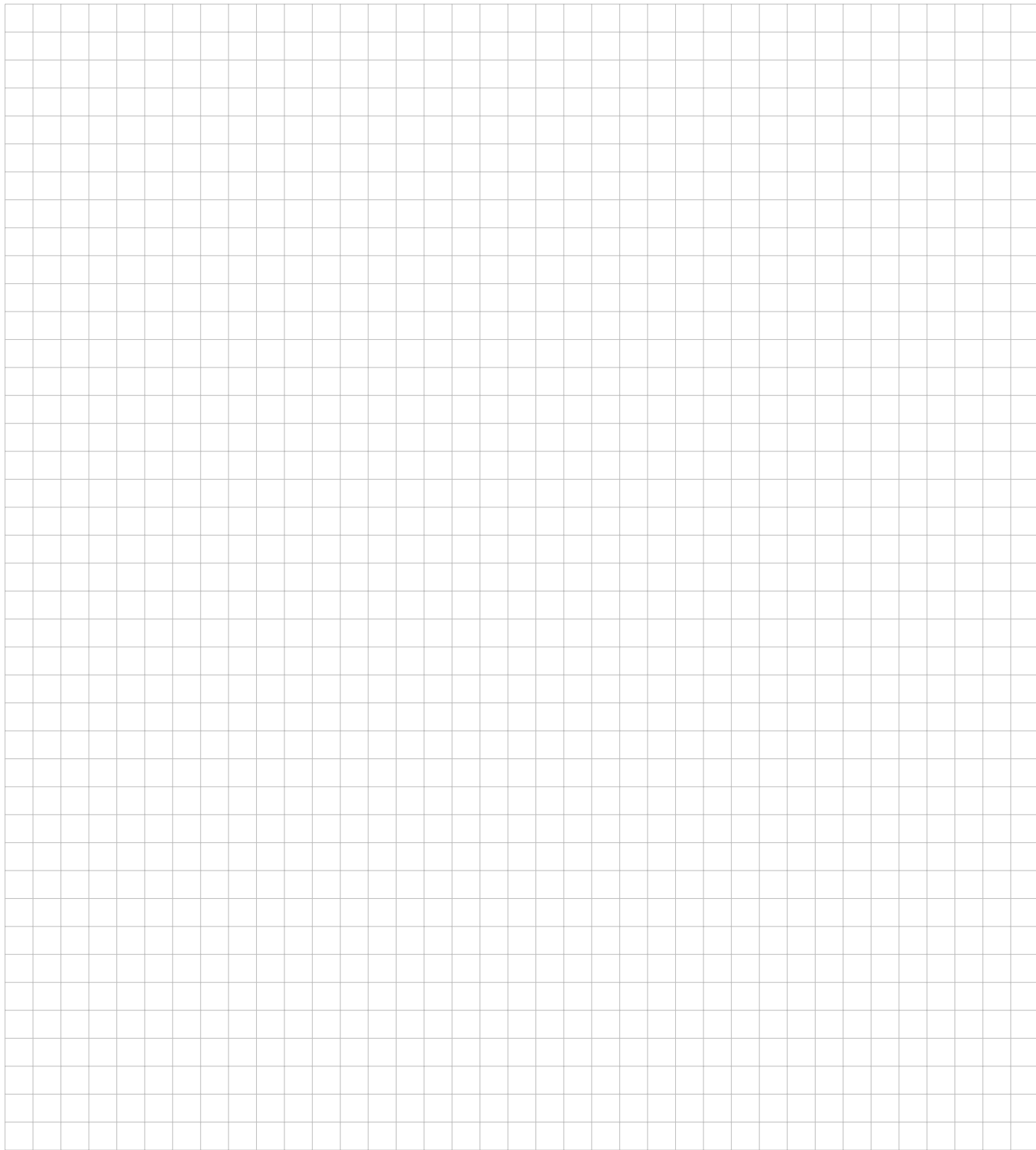
Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na  
następnych stronach.

**Zadanie 1. (0-2)**

Dane są liczby

$$a = \log_{2023} 2024 \cdot \log_{2021} 2022 \quad \text{oraz} \quad b = \log_{2023} 2022 \cdot \log_{2021} 2024$$

**Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{a}{b}$ . Zapisz obliczenia.**

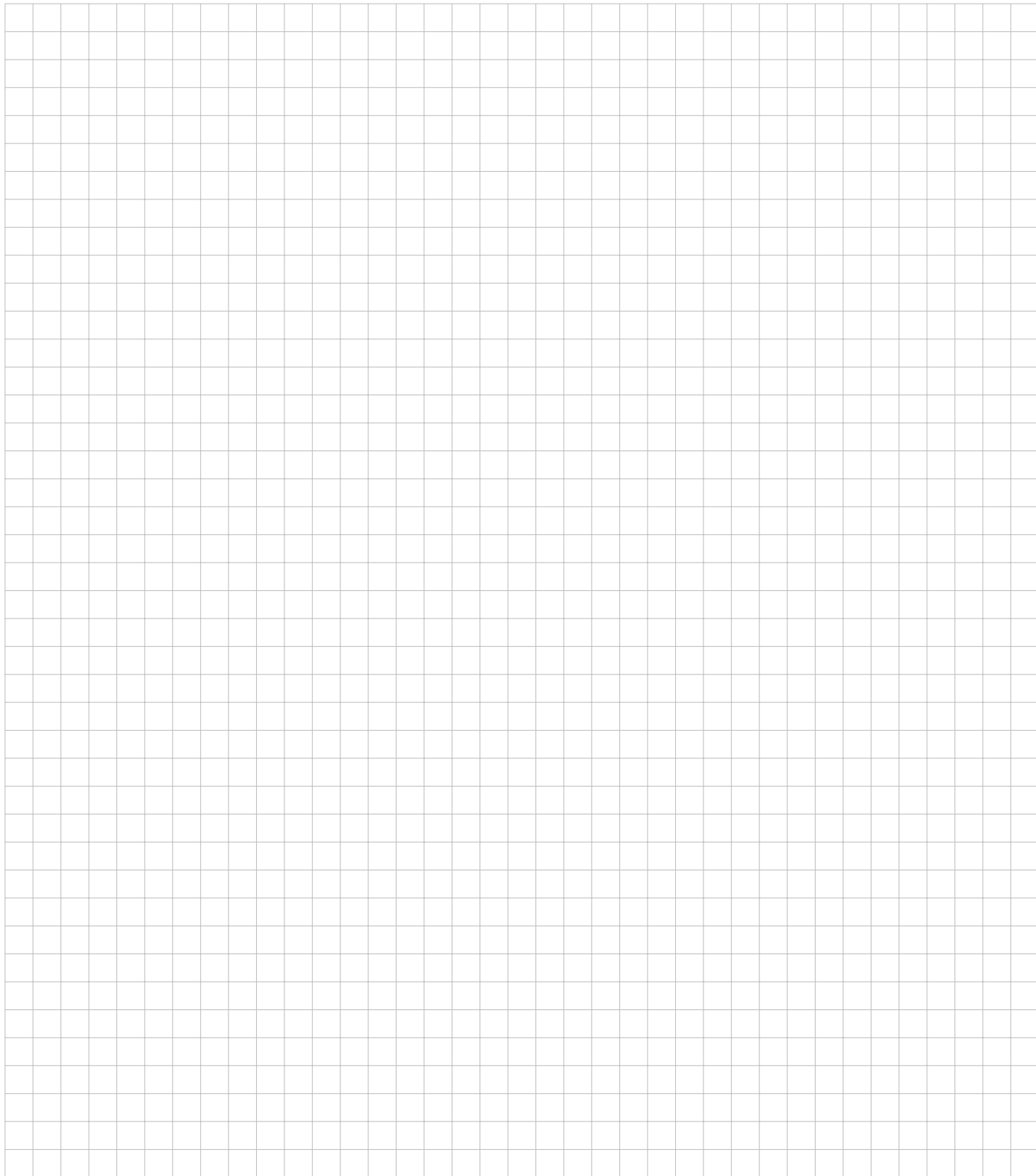


**Zadanie 2.** (0-4)

**Rozwiąż równanie**

$$4 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x$$

**w przedziale  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Zapisz obliczenia.**

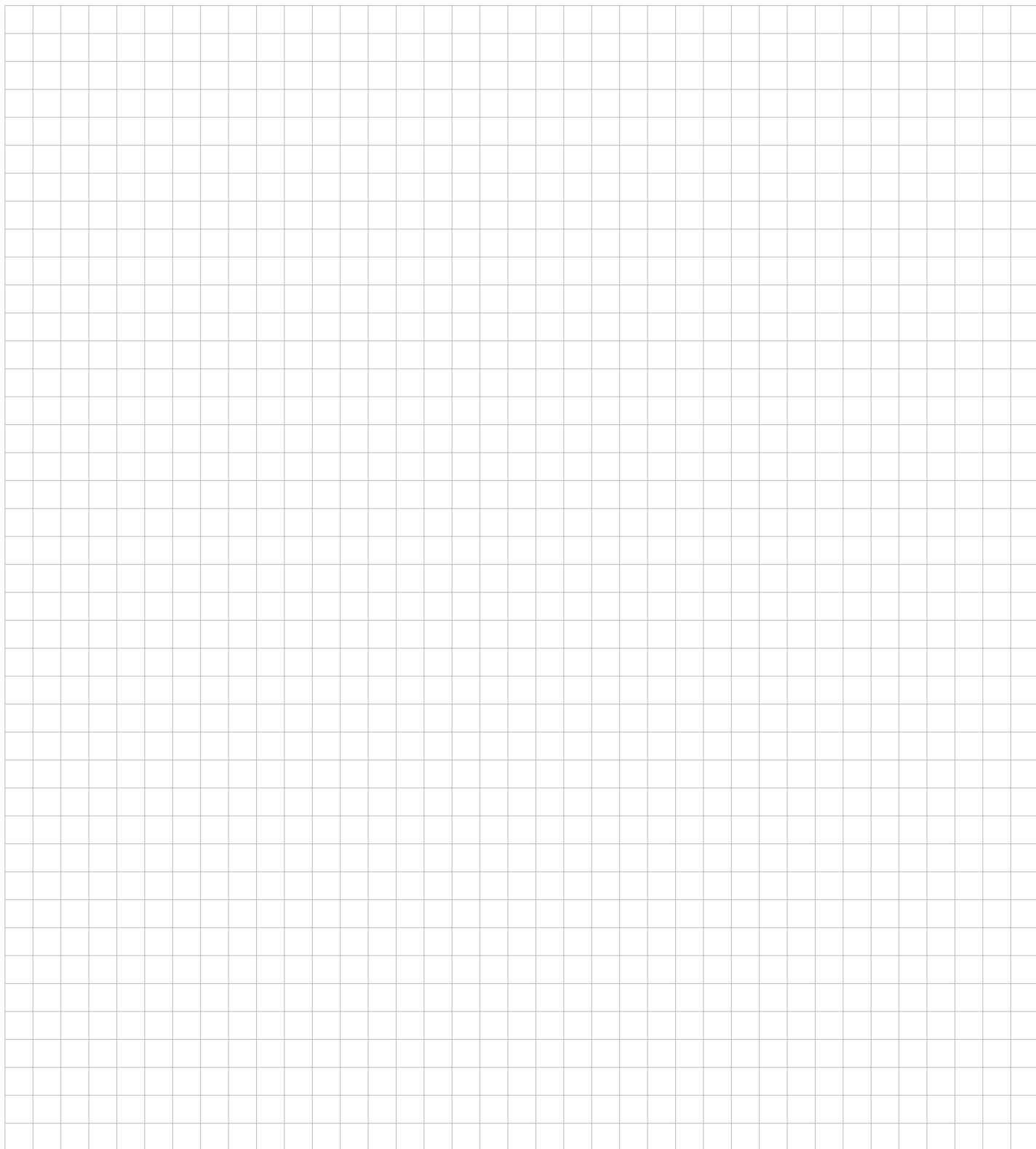


**Zadanie 3. (0-3)**

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  takiej, że  $k \neq 0$ , spełniona jest nierówność

$$\frac{k^4 + 6}{k^2} > 5$$

Zapisz obliczenia.

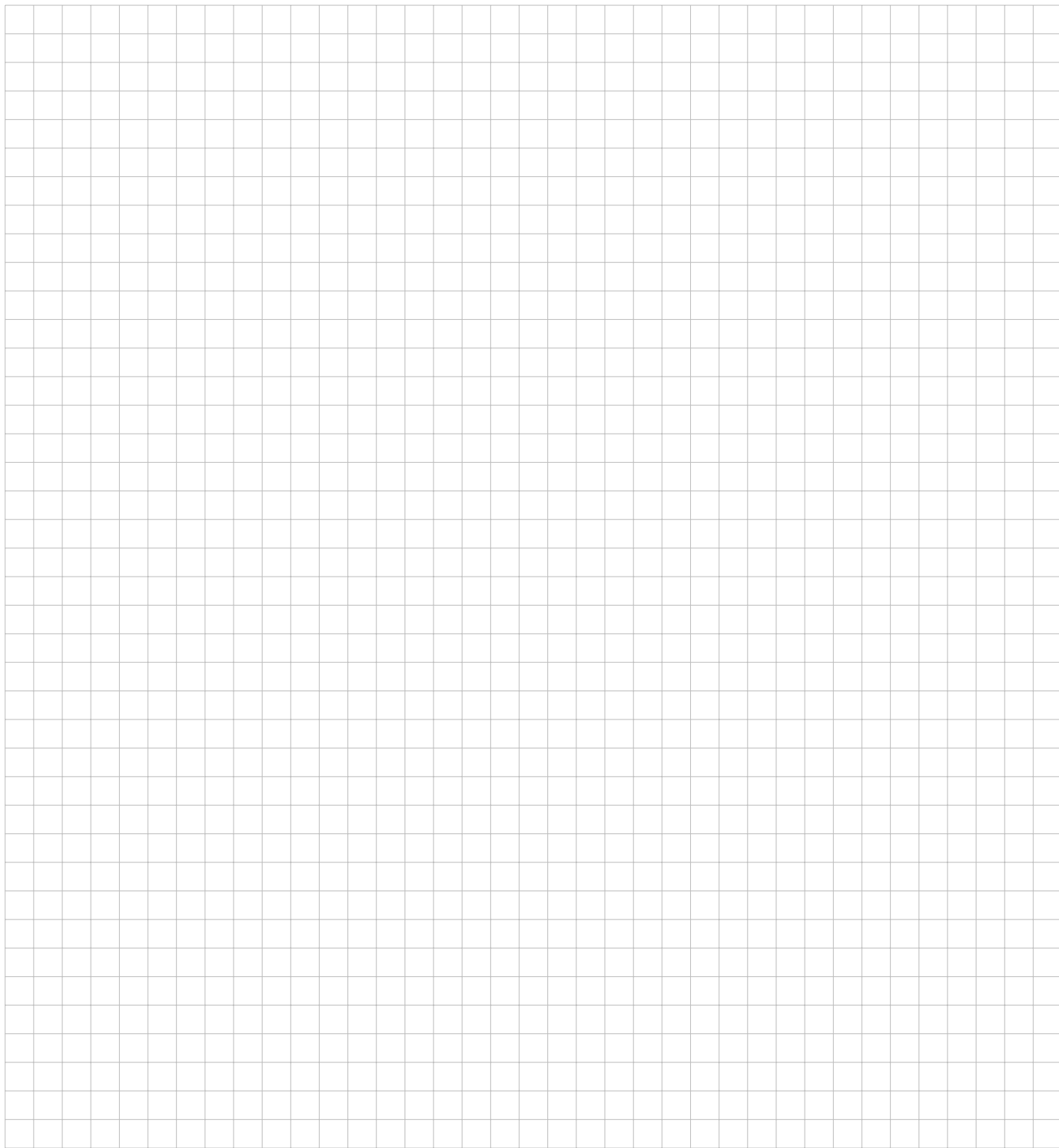


**Zadanie 4. (0-3)**

Dana jest funkcja  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem

$$f(x) = \frac{-6x^2 + 1}{3x^3}$$

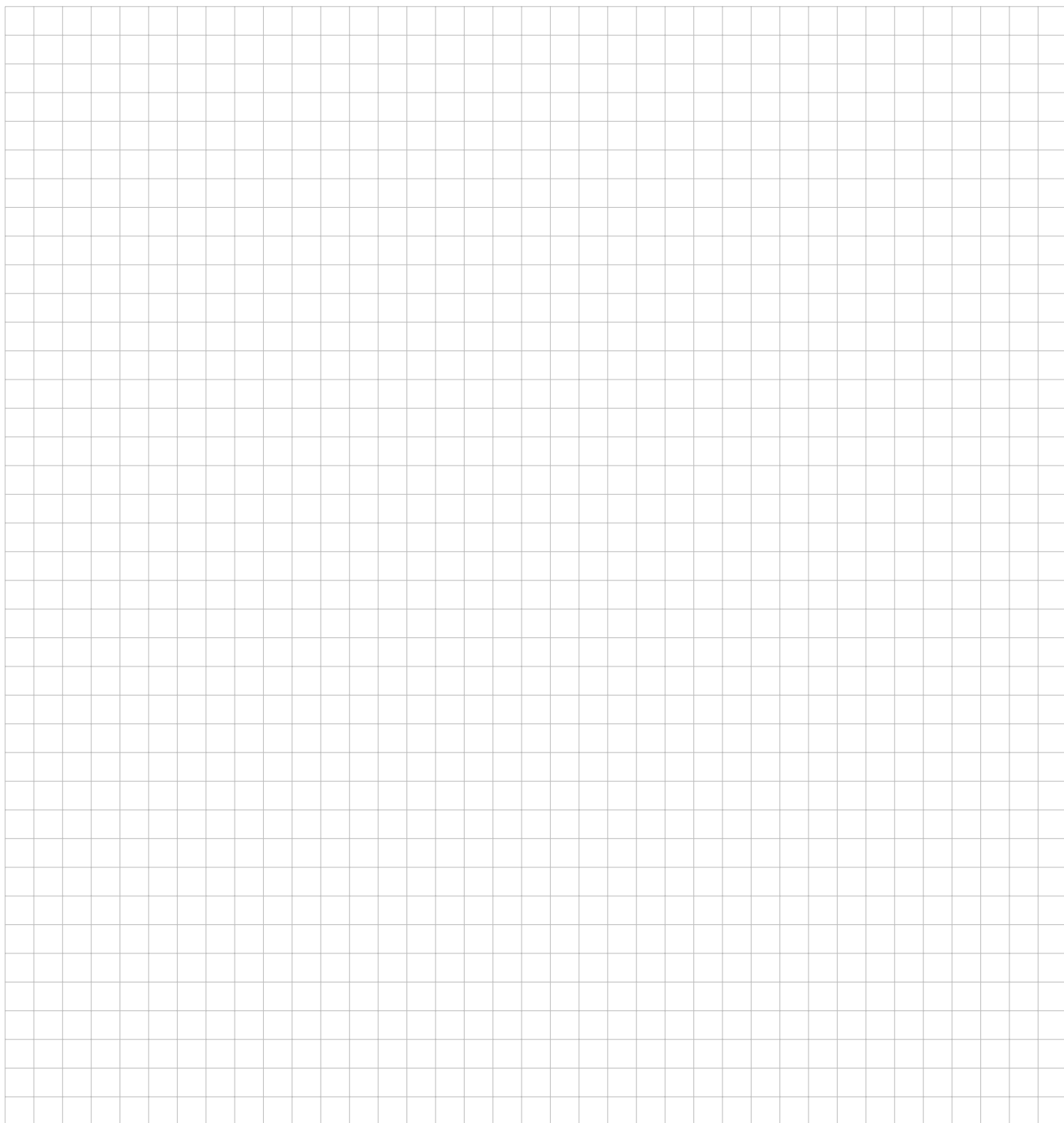
Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$ , która wraz z osią  $OX$  wyznacza kąt  $45^\circ$ .  
Zapisz obliczenia.



**Zadanie 5. (0–3)**

Prawdopodobieństwo wystąpienia wypadku drogowego na al. Grunwaldzkiej w Gdańsku jest równe 0,05. Prawdopodobieństwo to zwiększa się do 0,08, gdy na tej alei pojawia się pewien pracownik Uniwersytetu Gdańskiego. Prawdopodobieństwo tego, że w środę pojawi się on na al. Grunwaldzkiej jest równe 0,3.

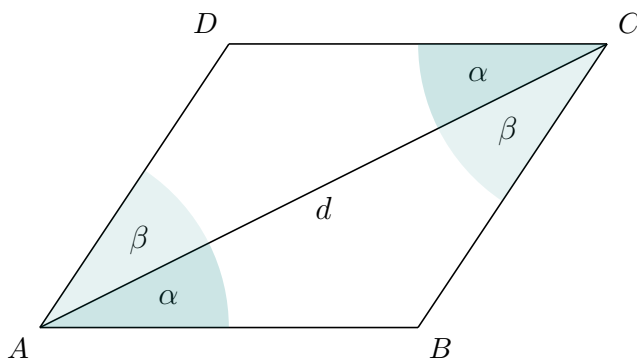
**Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na tym, że środa będzie dniem bezwypadkowym na al. Grunwaldzkiej w Gdańsku. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych. Zapisz obliczenia.**





**Zadanie 6.** (0-3)

Przekątna  $AC$  równoległoboku  $ABCD$  tworzy z jego bokami kąty miary  $\alpha$  i  $\beta$  oraz  $|AC| = d$  (zobacz rysunek).



Wykaż, że pole równoległoboku  $ABCD$  jest równe  $\frac{d^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . Zapisz obliczenia.



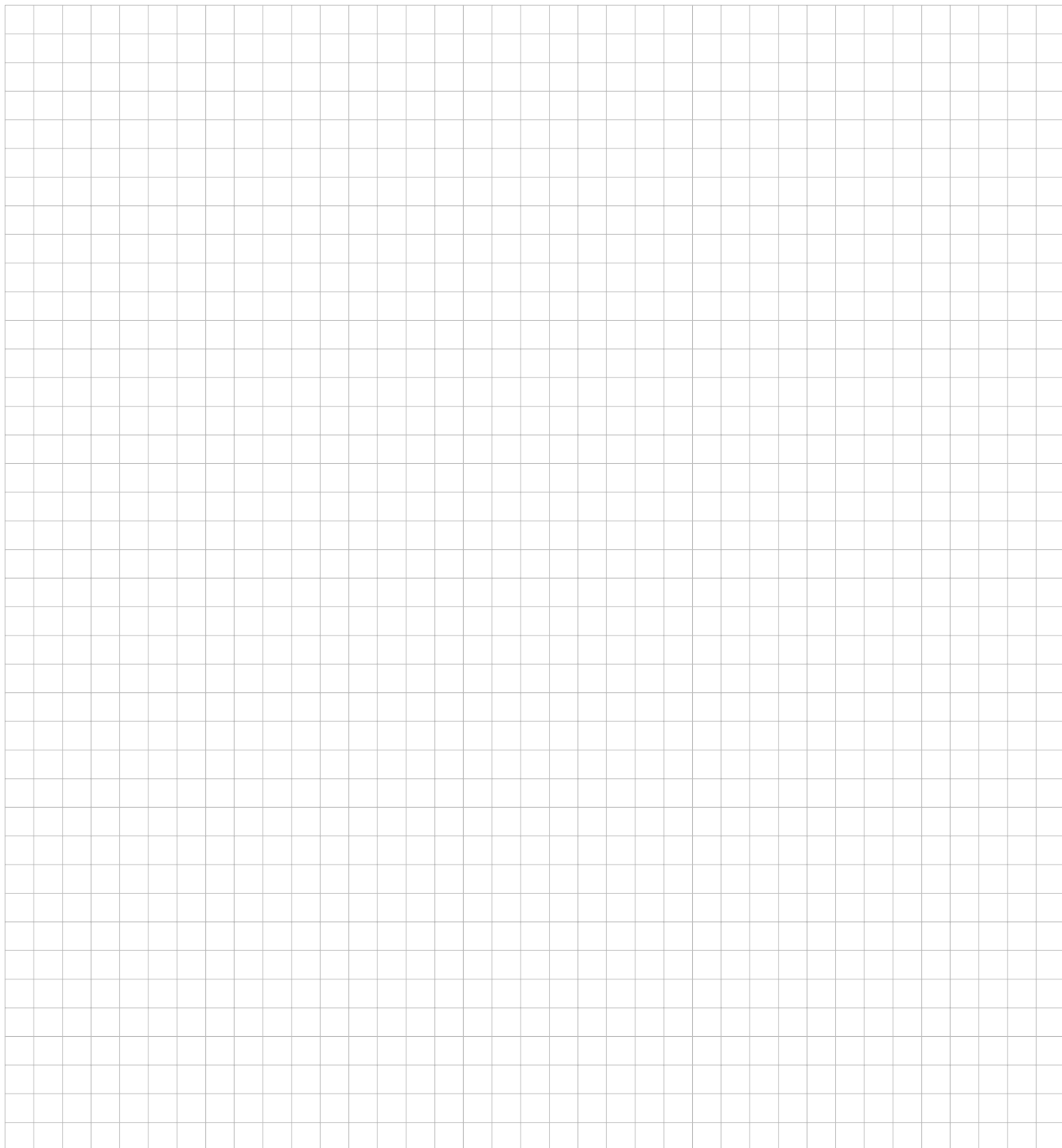
**Zadanie 7. (0-4)**

**Rozwiąż równanie**

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{4x^2 + 16x + 16} = 1$$

**Zapisz obliczenia.**

*Wskazówka: skorzystaj z tego, że  $\sqrt{a^2} = |a|$  dla każdej liczby rzeczywitej  $a$ .*



**Zadanie 8.** (0–4)

Określamy prostokąty  $P_1, P_2, P_3, \dots$  następująco:

- $P_1$  jest prostokątem o polu równym 2;
  - $P_2$  jest prostokątem podobnym do prostokąta  $P_1$  w skali  $\frac{x}{2}$ ;
  - $P_3$  jest prostokątem podobnym do prostokąta  $P_2$  w skali  $\frac{x}{2}$ ;
- i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$ ,
- $P_n$  jest prostokątem podobnym do prostokąta  $P_{n-1}$  w skali  $\frac{x}{2}$ ;

gdzie  $x$  jest pewną liczbą rzeczywistą, dodatnią.

Pola wszystkich tych prostokątów tworzą nieskończony ciąg geometryczny, którego suma wszystkich wyrazów jest równa 4.

**Wyznacz liczbę naturalną  $k \in \mathbb{N}$ , dla której pole prostokąta  $P_k$  jest równe  $2^{-13}$ . Zapisz obliczenia.**

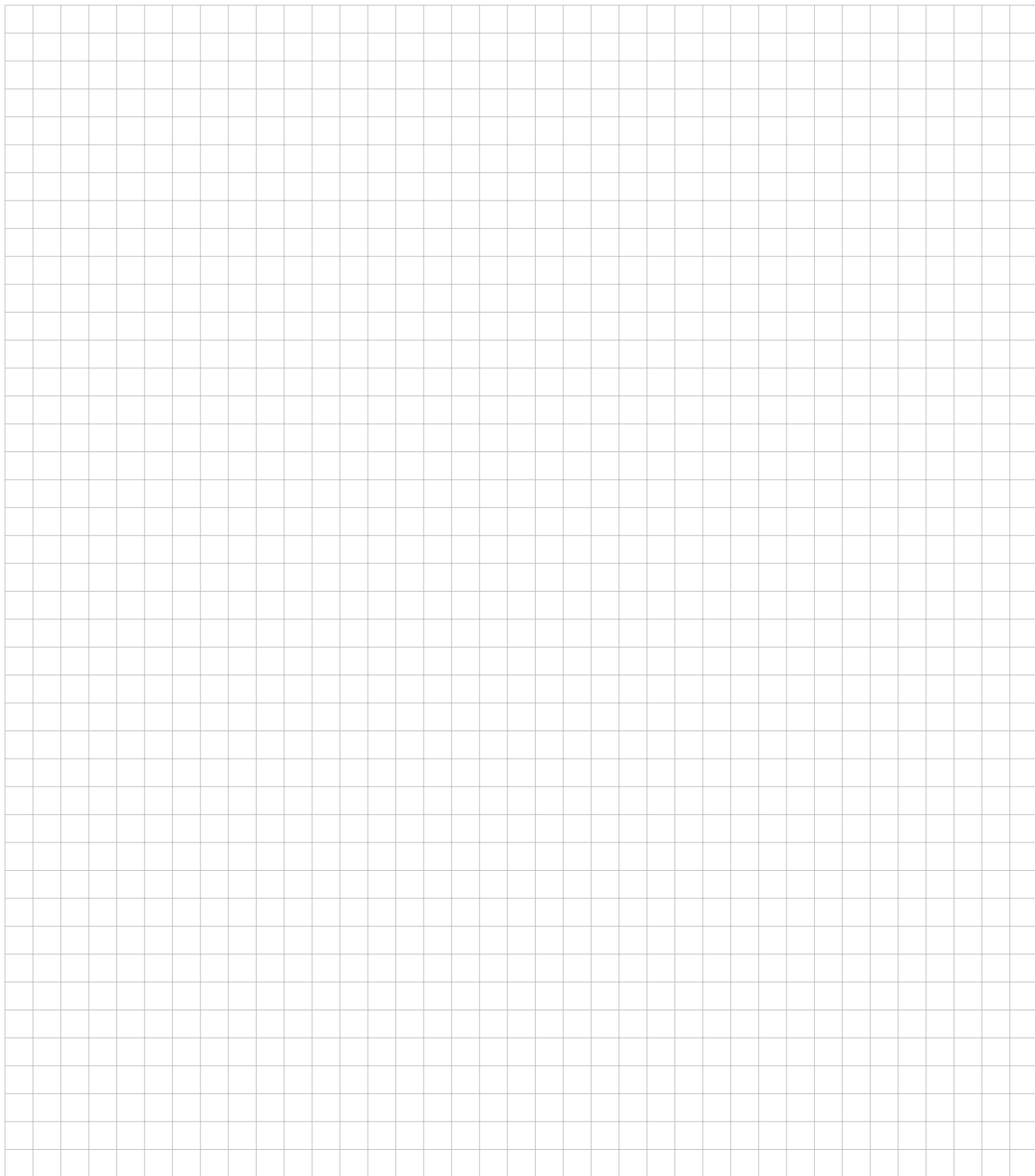


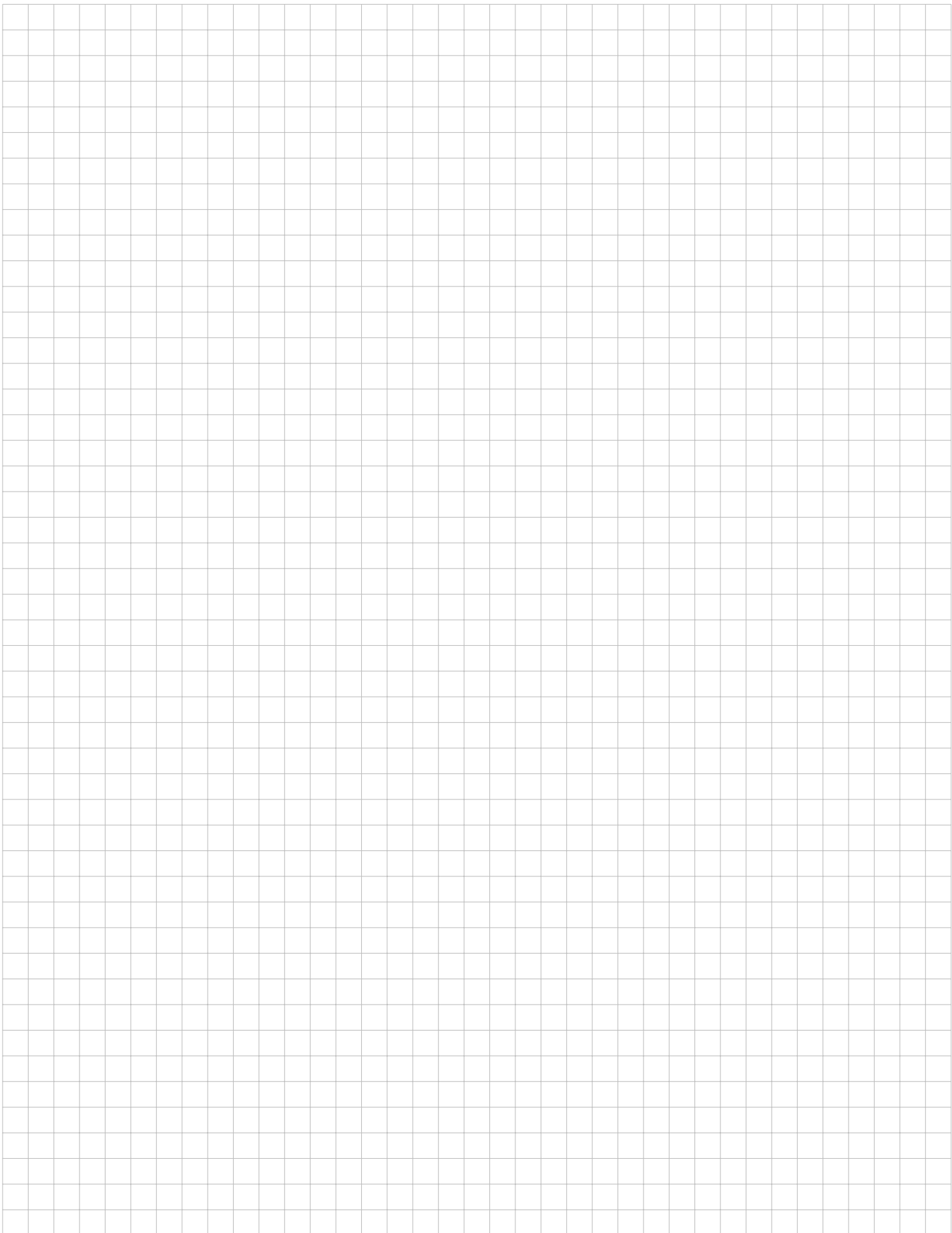
**Zadanie 9.** (0-5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$ , dla których równanie

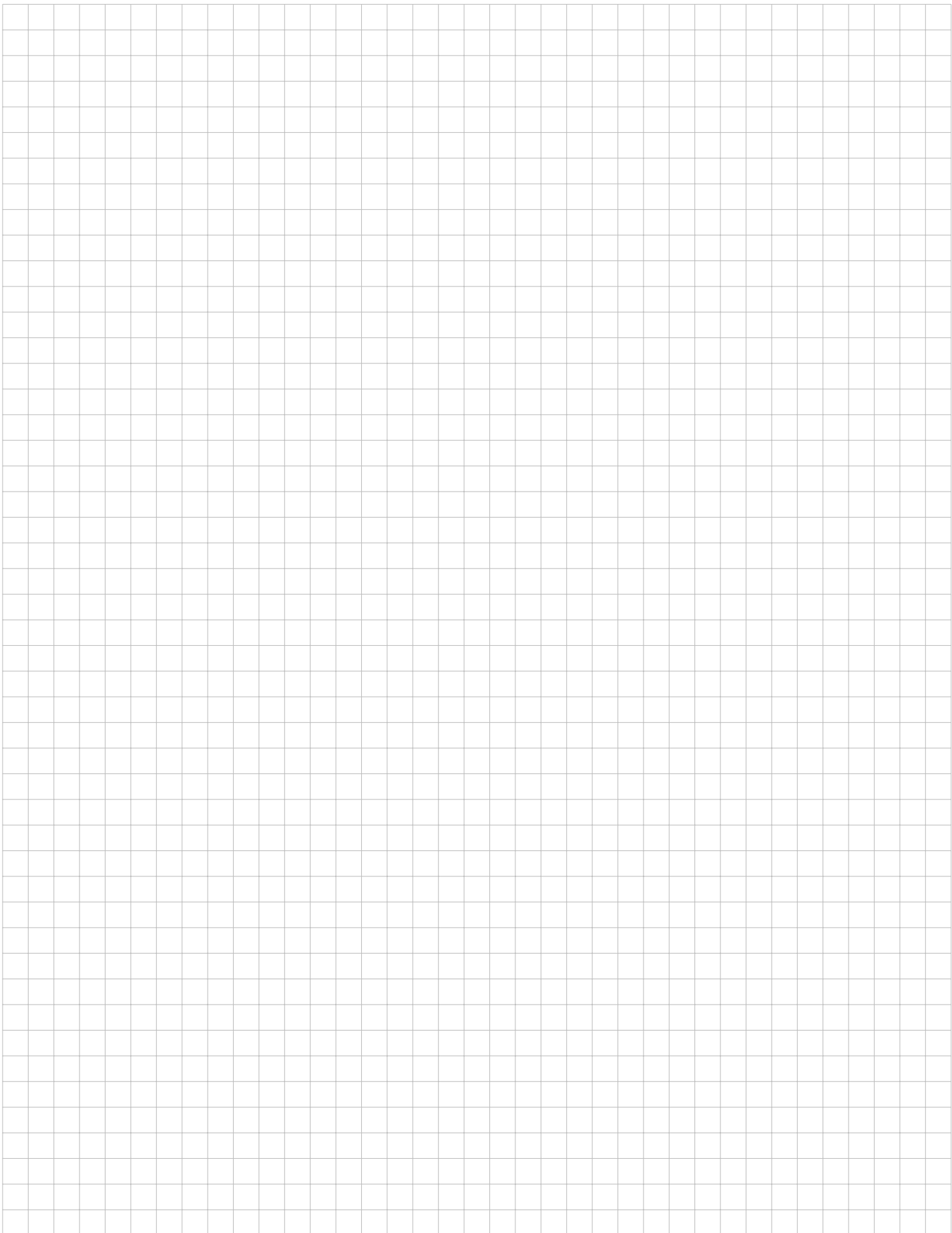
$$(m + 1)x^2 - (m + 1)x + 4m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania dodatnie. Zapisz obliczenia.











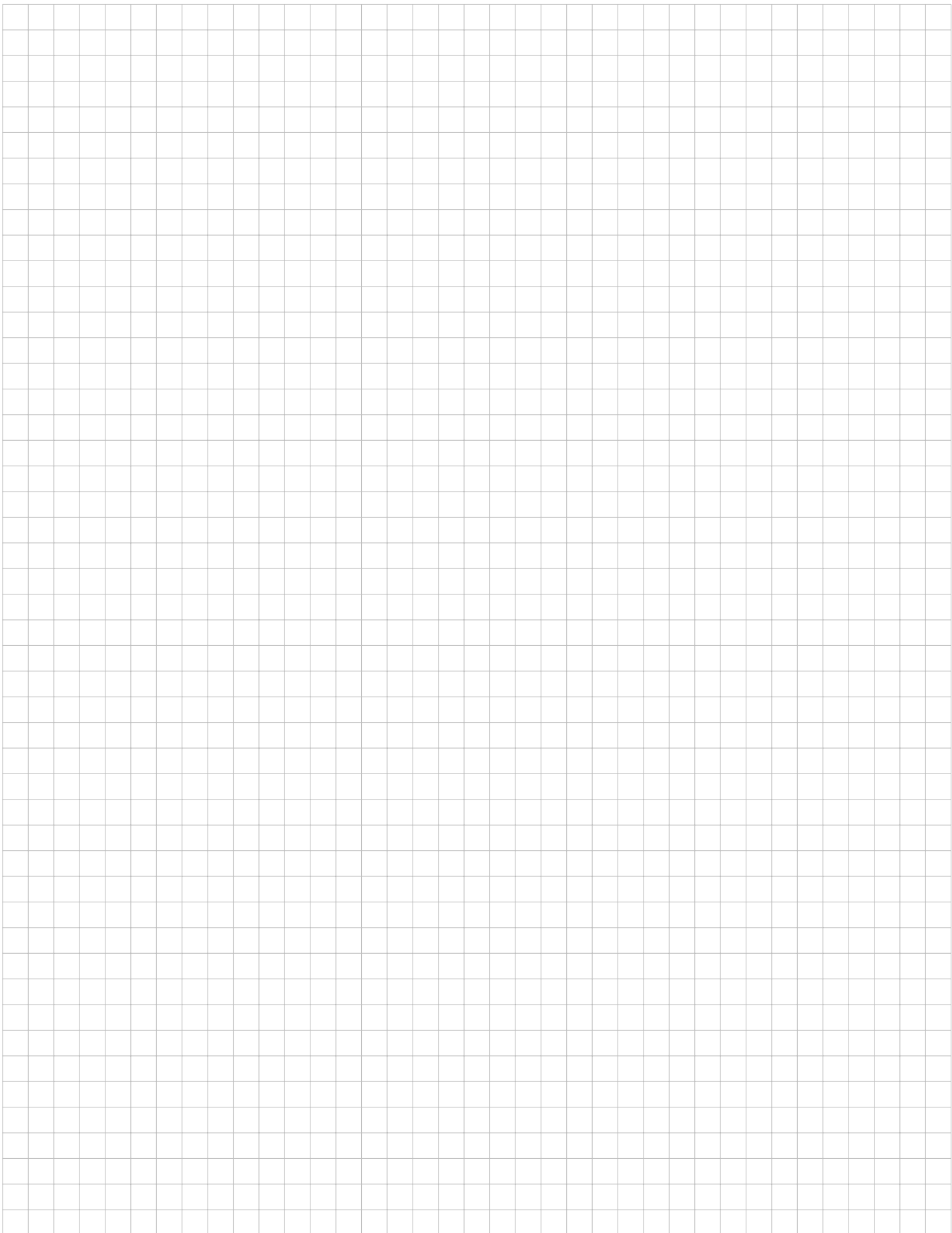


**Zadanie 12.** (0-5)

W kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$  dane są proste  $k : -x + 3y - 3 = 0$  oraz  $l : -3x + y + 3 = 0$ .

**Wyznacz równanie prostej, na której leżą dwusieczne kątów ostrych wyznaczonych przez proste  $k$  i  $l$ . Zapisz obliczenia.**





**Zadanie 13.** (0-6)

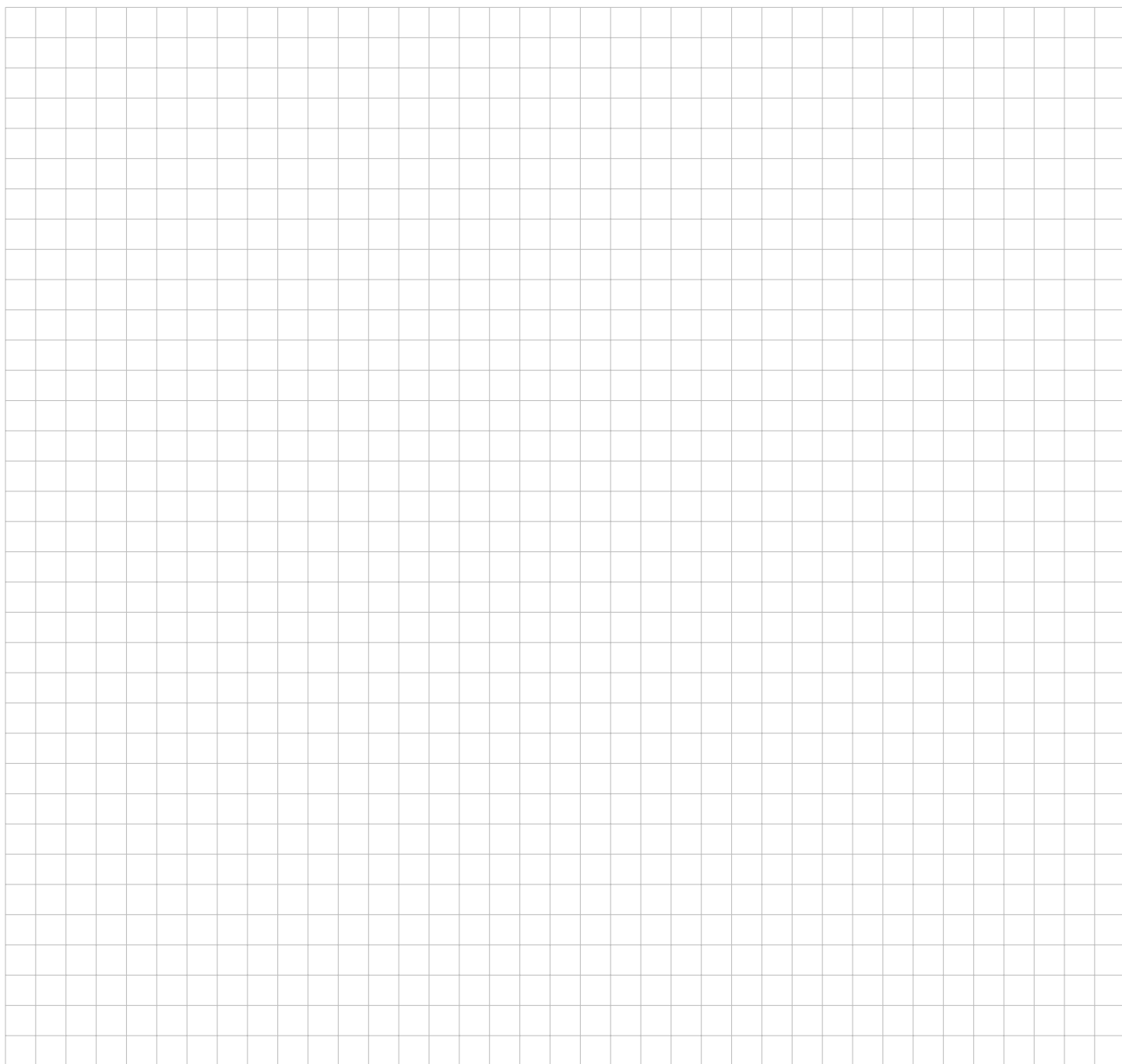
Rozważamy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, których suma wszystkich krawędzi jest równa 4, a krawędź podstawy ma długość  $x$ , gdzie  $x \in (0, 2 - \sqrt{2})$ .

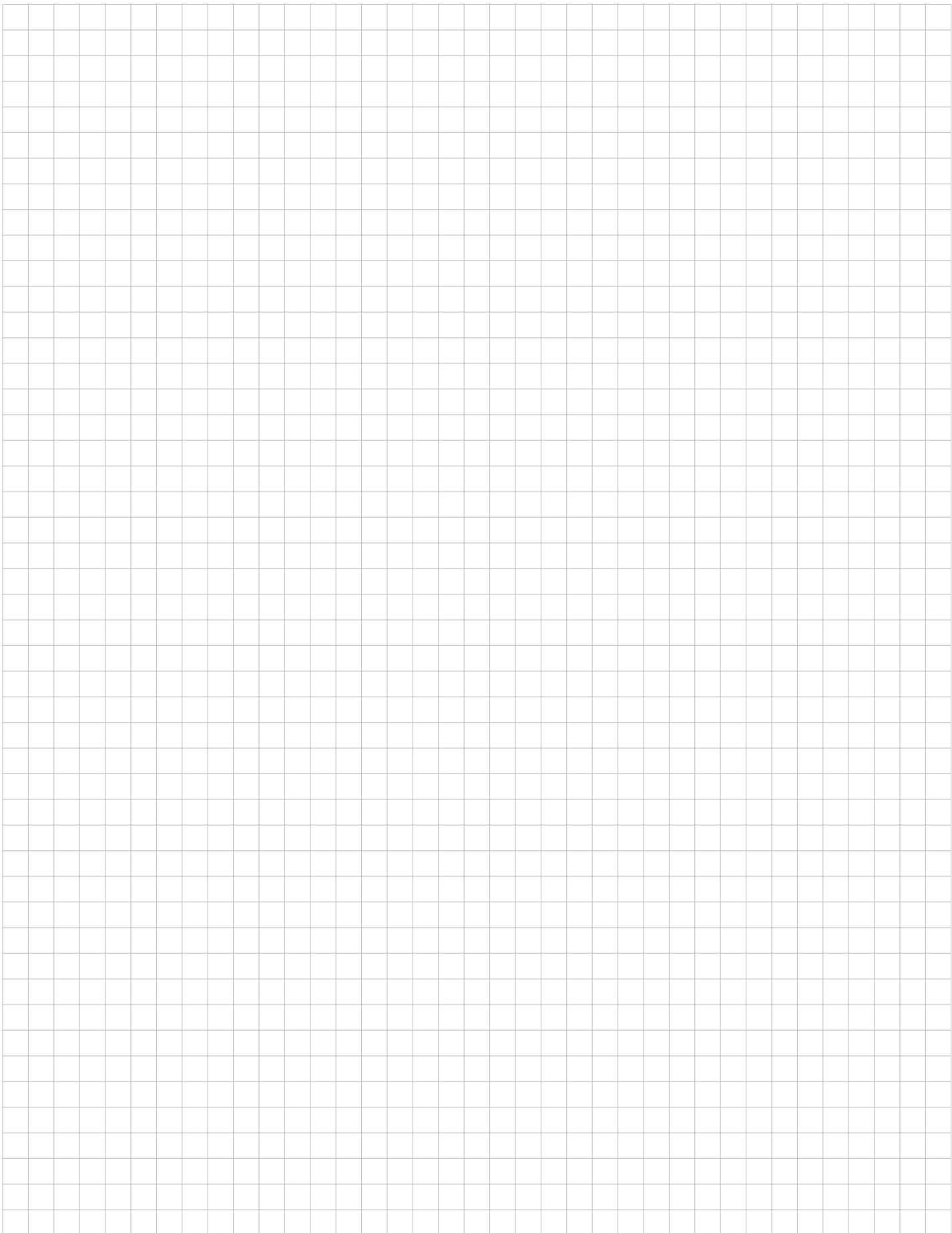
(a) Wykaż, że objętość ostrosłupa, jako funkcja zmiennej  $x$  wyraża się wzorem

$$V(x) = \frac{x^2}{6} \sqrt{2x^2 - 8x + 4}$$

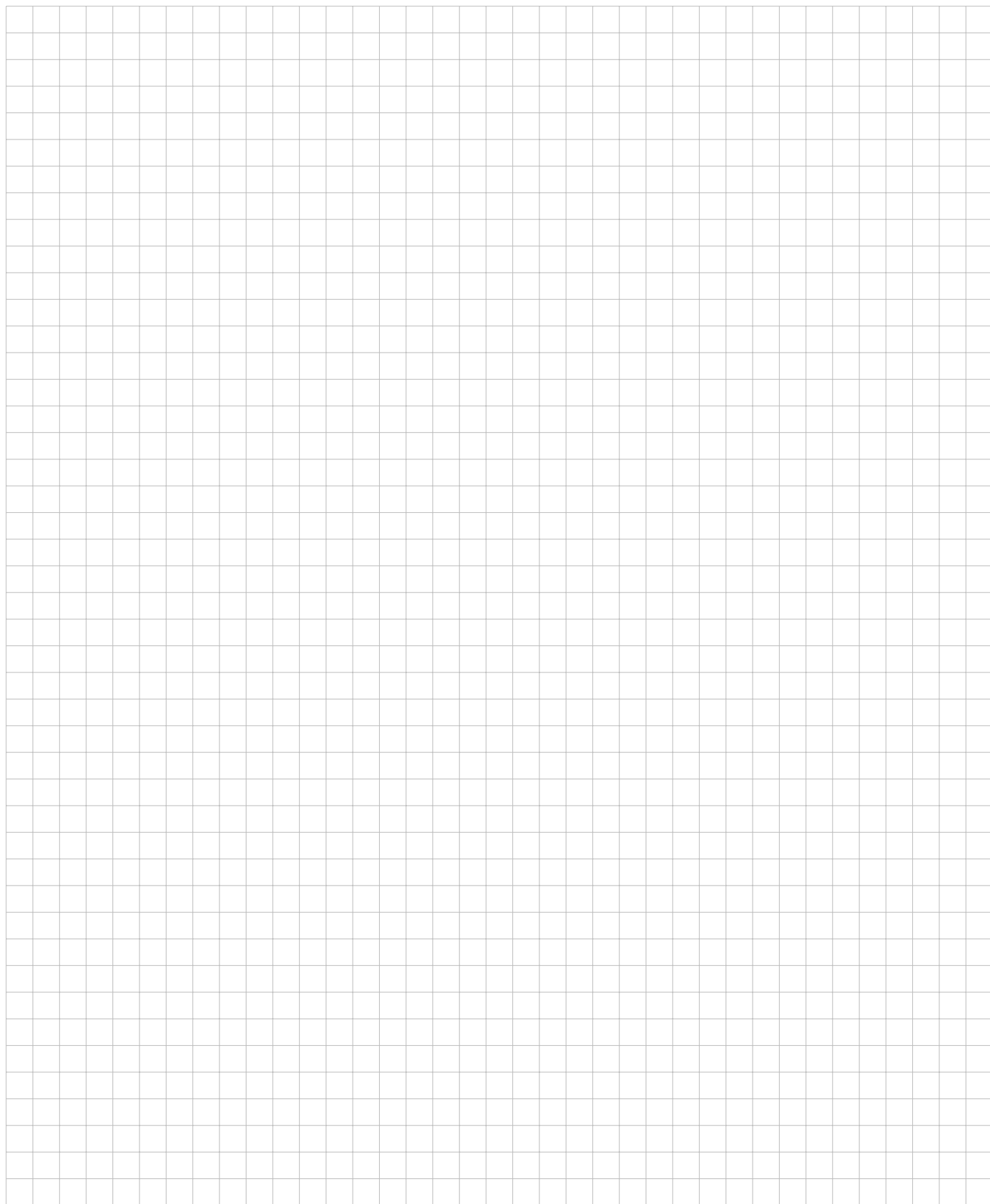
(b) Oblicz tę wartość  $x$ , dla której funkcja  $V$  osiąga wartość największą. Wyznacz pole podstawy tego ostrosłupa, którego objętość jest największa.

Zapisz obliczenia.

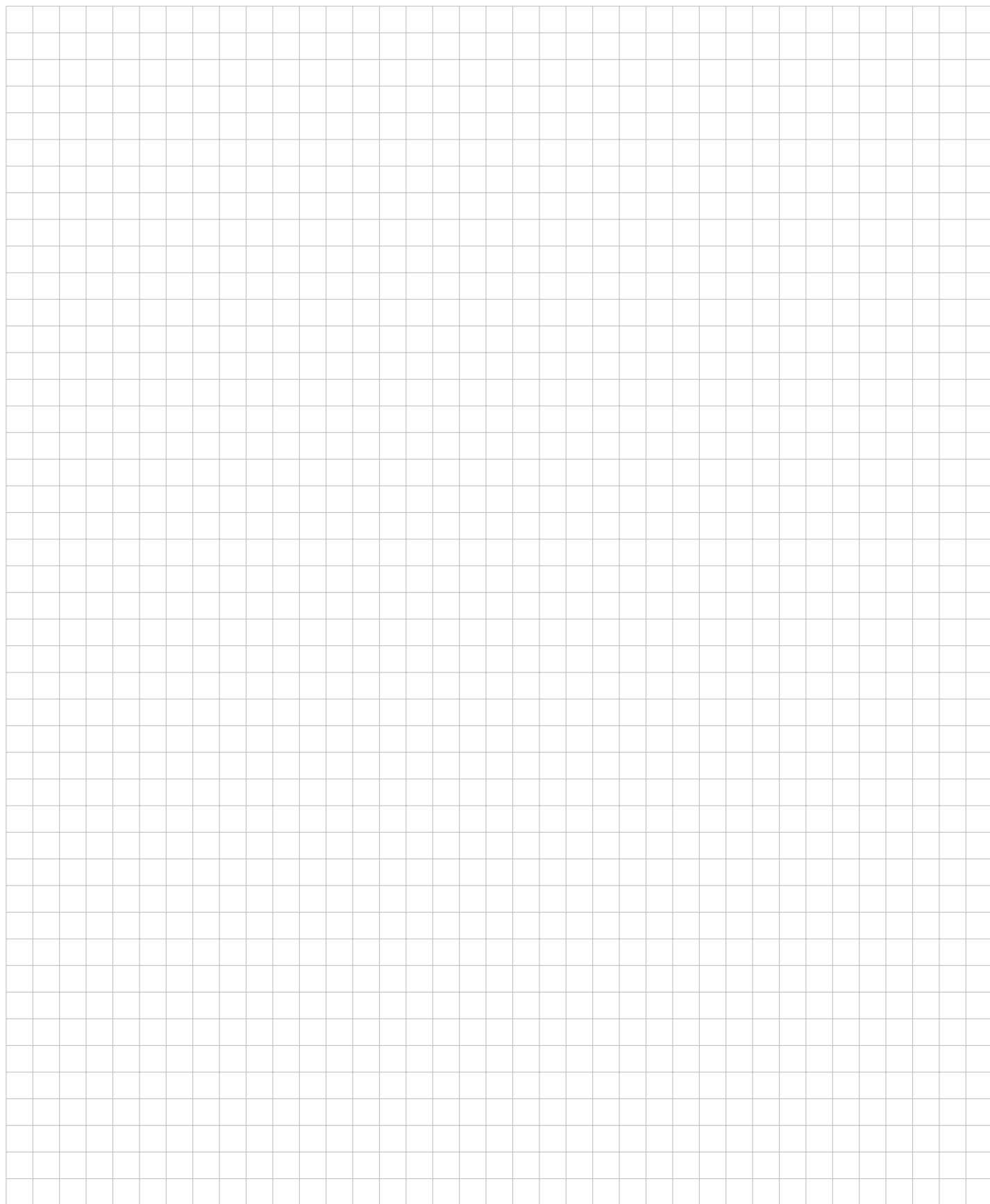




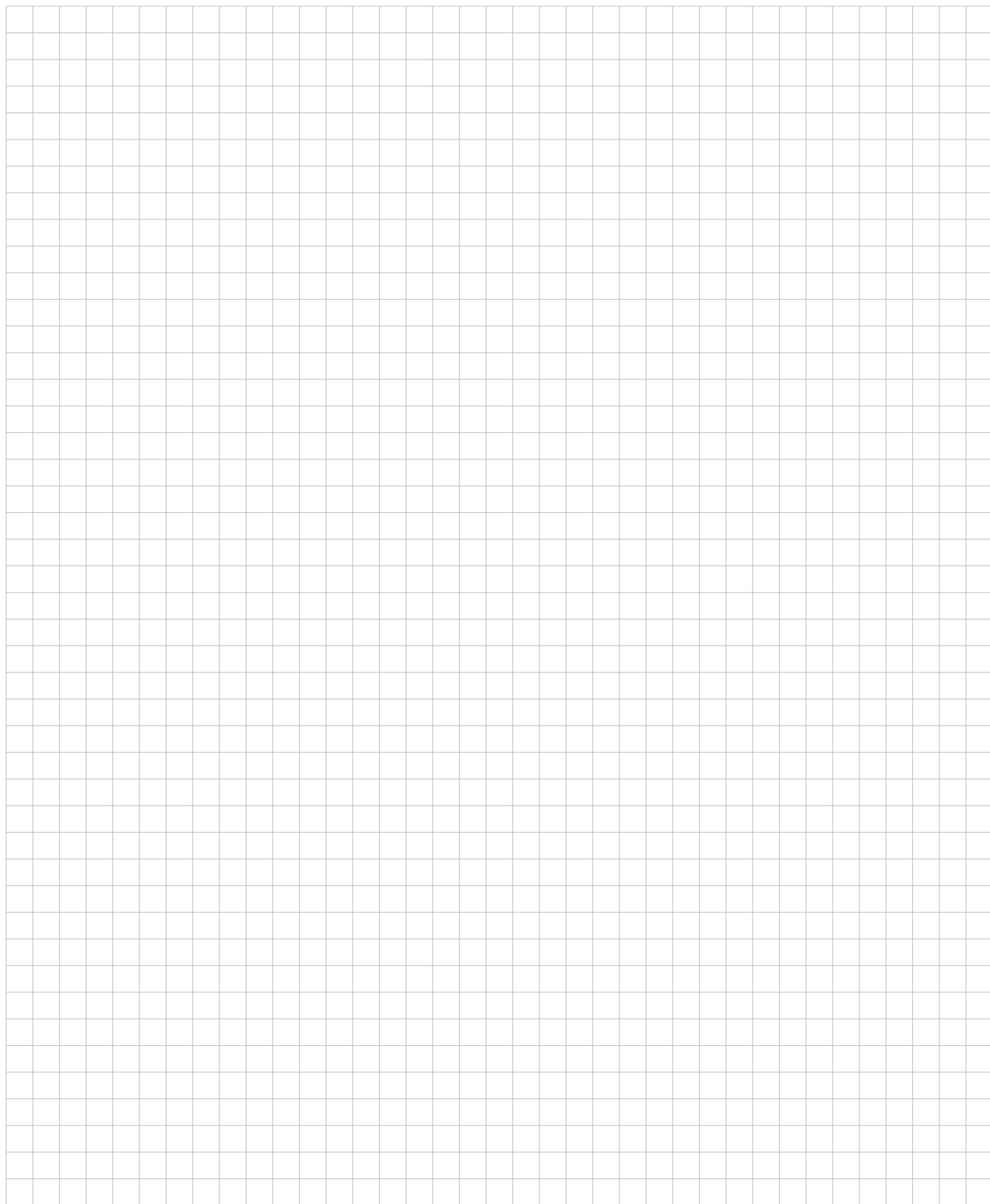
# BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



# BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



# BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)



# BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

