Zagadnienia na egzamin licencjacki 2023/2024 dla kierunku MATEMATYKA

Poniższe zagadnienia nie są pytaniami na egzaminie licencjackim, lecz tematami, których znajomość będzie wymagana na egzaminie.

Analiza matematyczna

1. Granica ciągu liczbowego. Ciągi zbieżne. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
2. Definicja zbieżności szeregu liczbowego. (Suma szeregu, n-ta suma częściowa, n-ta reszta)/
3. Kryteria zbieżności szeregów.
4. Szeregi potęgowe. Promień zbieżności, przedział zbieżności.
5. Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji w punkcie i ich równoważność (w różnych przypadkach – skończonych i nieskończonych).
6. Definicje Heinego i Cauchy'ego ciągłości funkcji w punkcie i ich równoważność.
7. Własności funkcji ciągłych określonych na przedziale.
8. Zbieżność punktowa a zbieżność jednostajna ciągów funkcyjnych.
9. Twierdzenie o ciągłości granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych.
10. Szeregi funkcyjne. Kryterium Weierstrassa zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego.
11. Pochodna funkcji w punkcie. Różniczkowalność a ciągłość.
12. Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji różniczkowalnych. Pochodna złożenia, pochodna funkcji odwrotnej.
13. Twierdzenia o wartości średniej: Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego.
14. Reguła de l'Hospitala.
15. Twierdzenie Taylora.
16. Szereg Taylora, szereg Maclaurina. Funkcje rozwijalne w szereg potęgowy.
17. Konstrukcja całki Riemanna.
18. Całkowalność funkcji ciągłych. Twierdzenie Riemanna.
19. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego.
20. Zwartość. Zbiory zwarte w przestrzeniach euklidesowych.
21. Własności funkcji ciągłych określonych na zbiorach zwartych.
22. Pochodna funkcji wielu zmiennych w punkcie. Pochodna a ciągłość funkcji.
23. Pochodne cząstkowe. Związek między pochodną a pochodnymi cząstkowymi.
24. Odwzorowania klasy C^1. Dyfeomorfizmy.
25. Twierdzenie o lokalnym odwracaniu odwzorowań.
26. Twierdzenie o funkcji uwikłanej.
27. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Twierdzenie Schwarza o symetrii różniczki drugiego rzędu.
28. Warunki konieczne i dostateczne na istnienie ekstremum lokalnego w punkcie.
29. Twierdzenie Fubiniego dla całki Riemanna.
30. Zbiory mierzalne w sensie Jordana. Twierdzenie o zamianie zmiennych dla funkcji wielu zmiennych.
31. Definicja całki krzywoliniowej skierowanej. Twierdzenie Greena. Pola wektorowe. Własności całki krzywoliniowej w polu potencjalnym.

Wstęp do matematyki

1. Prawa de Morgana dla rachunku zdań, kwantyfikatorów i zbiorów.
2. Relacje, dziedzina, przeciwdziedzina, funkcja jako relacja, funkcja odwrotna.
3. Funkcja z X do Y, injekcje, surjekcje, bijekcje, funkcja odwrotna, składanie funkcji.
4. Obrazy i przeciwobrazy zbioru przez funkcje. Własności.
5. Relacja równoważności. Zasada abstrakcji.
6. Zbiory częściowo, liniowo i dobrze uporządkowane. Elementy wyróżnione.
7. Twierdzenie Cantora-Bernsteina i jego zastosowania.
8. Twierdzenie Cantora o mocy rodziny wszystkich podzbiorów danego zbioru.
9. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne. Dowód nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych.

Algebra liniowa z geometrią

1. Ciało liczb zespolonych.
2. Baza przestrzeni liniowej.
3. Wymiar przestrzeni liniowej.
4. Związek między wymiarami jądra i obrazu homomorfizmu przestrzeni liniowej.
5. Macierz homomorfizmu liniowego.
6. Rząd macierzy.
7. Twierdzenie Kroneckera-Capelli'ego.
8. Wyznacznik macierzy i jego własności.
9. Twierdzenie Cramera.
10. Wektory własne. Wielomian charakterystyczny.
11. Iloczyn skalarny
12. Długość wektora i kąt między wektorami
13. Przestrzeń euklidesowa.
14. Bazy ortogonalne.
15. Kryterium Sylwestera.

Algebra

1. Podstawowe struktury algebraiczne: grupa, pierścień, ciało.
2. Homomorfizmy grup, pierścieni, ciał. Jądro homomorfizmu. Izomorfizm.
3. Definicja i własności pierścienia wielomianów (jednej oraz wielu zmiennych).
4. Elementy odwracalne, nieodwracalne i dzielniki zera w pierścieniu.
5. Ideał pierścienia. Pierścień ilorazowy.
6. Dziedzina ideałów głównych. Definicja i przykłady.
7. Ideały pierwsze i maksymalne.
8. Twierdzenie Lagrange'a dla grup. Indeks podgrupy.
9. Podgrupa normalna. Grupa ilorazowa.
10. Rząd elementu grupy, podgrupa generowana przez zbiór.
11. Klasyfikacja skończenie generowanych grup abelowych.
12. Grupa permutacji i jej własności. Twierdzenie Cayley'a.
13. Permutacja jako iloczyn transpozycji. Parzystość permutacji.

Wstęp do teorii miary

1. Przestrzenie mierzalne, funkcje mierzalne. Przestrzenie z miarą.
2. Miara Lebesgue'a w R^n, konstrukcja i własności.
3. Twierdzenia graniczne: twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej, lemat Fatou, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.
4. Konstrukcja całki Lebesgue'a. Funkcje całkowalne i ich własności.
5. Związek całki Lebesgue'a z całką Riemanna.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Przestrzeń probabilistyczna.
2. Prawdopodobieństwo warunkowe, wzór Bayesa i wzór na prawdopodobieństwo całkowite.
3. Schemat Bernoulliego i rozkład dwumianowy.
4. Rozkład normalny i reguła 3 sigm.
5. Zmienna losowa, dystrybuanta i rodzaje rozkładów prawdopodobieństwa.
6. Wartość oczekiwana, wariancja i nierówność Czebyszewa.
7. Niezależność zdarzeń i zmiennych losowych.
8. Prawo wielkich liczb.
9. Centralne twierdzenie graniczne.

Topologia

1. Przestrzenie metryczne.
2. Zbiory domknięte i otwarte. Domknięcie, wnętrze i brzeg zbioru.
3. Odwzorowania ciągłe w przestrzeniach metrycznych. Homeomorfizmy.
4. Ciągowo zwarte i zwarte przestrzenie metryczne i ich własności.
5. Przestrzenie metryczne zupełne. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu zwężającym.
6. Zbiory spójne. Własność Darboux.

Równania różniczkowe

1. Równanie liniowe pierwszego rzędu.
2. Równanie o zmiennych rozdzielonych.
3. Lemat Gronwalla.
4. Twierdzenia Picarda i Peano.
5. Macierz Wrońskiego dla równania liniowego n-tego rzędu. Wzór Liouville'a.
6. Konstrukcja układu fundamentalnego rozwiązań dla równania liniowego n-tego rzędu o stałych współczynnikach.
7. Macierz fundamentalna dla liniowego układu równań. Metoda uzmienniania stałych.