Jan Dymara
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
dymara@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 19.VI.2020

Recenzja rozprawy doktorskiej p. mgr Marty Leśniak

Rozprawa nosi bardzo adekwatny do swej treści tytuł “Normalne generatory grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej”.

Kontekst.

Elementami grupy $\mathcal{M}$ klas odwzorowań powierzchni są klasy deformacji (izotopii) jej homeomorfizmów. Grupy te – dla powierzchni orientowalnych – są badane od ok. 100 lat i zajmują ważne miejsce w niskowymiarowej topologii, geometrii algebraicznej i geometrycznej teorii grup. Przez ostatnie dwie dekady intensywnie rozwija się paralelna teoria nieorientowalna, dziwnie niezależna od swej starszej siostry. Matematycy gdańscy (Stukow, Szepietowski) mają w tym bardzo poważny udział. Pytanie o możliwe układy generatorów grupy klas odwzorowań powierzchni nieorientowalnej nie jest już może szczytem możliwości teorii, ale wciąż nie jest zamknięte i pozostaje ważnym obszarem badań.

Podstawowe obiekty i techniki.

Dwa podstawowe w rozprawie rodzaje homeomorfizmów to:

- twisty Dehna (rozcinamy powierzchnię wzdłuż dwustronnej krzywej zamkniętej i sklejamy z powrotem z jednym pełnym obrotem, “naciągając” powierzchnię po jednej stronie krzywej);
- transpozycja wstęg (powierzchnię nieorientowalną N_g można przedstawić jako sferę, w której wycięto g dziur i zaklejono je wstęgami Möbiusa; homeomorfizm sfery zamieniający miejscami dwie z dziur rozszerza się do homeomorfizmu całej powierzchni).

Dwa twisty Dehna są sprzężone w $\mathcal{M}$ jeśli pewien homeomorfizm przekształca krzywą pierwszego twistu na krzywą drugiego twistu. Jest to dość częste zjawisko: jeśli dwie nieściągalne zamknięte krzywe są dwustronne i nierozdzielające, to istnieje homeomorfizm przekształcający jedną na drugą. Parę takich krzywych przecinających się transwersalnie w jednym punkcie nazywamy parą standardową I rodzaju; i znowu, każde dwie takie pary są równoważne przez homeomorfizm.

Twisty generują podgrupę $\mathcal{T}$ w $\mathcal{M}$, indeksu 2, równą komutantowi (o ile $g \geq 7$; dla uproszczenia tego streszczenia zakładam dalej, że ta nierówność jest spełniona). W lematach 1.13 i 1.15 pokazane jest, że złożenie twistów związanych z parą standardową I rodzaju normalnie generuje $\mathcal{T}$ (w znacznej mierze dzięki temu, że każde dwa takie złożenia są sprzężone). Dalej: jeśli (c, d) jest parą standardową I rodzaju, zaś homeomorfizm f przekształca c na d^{-1} (czyli d ze zmienioną orientacją), to $T_cT_d = T_sfT_c^{-1}f^{-1}$ jest złożeniem twistów leżącym w podgrupie normalnie generowanej przez f – czyli f normalnie generuje $\mathcal{T}$ (lub nawet $\mathcal{M}$). (Powyższa argumentacja ma źródła w pracy Laniera i Margalita dotyczącej przypadku orientowalnego.) Jedną z podstawowych technik pracy będzie więc wyszukiwanie, dla danego f, krzywej c przecinającej jednokrotnie $f(c)$ – i wnioskowanie stąd, że f normalnie generuje $\mathcal{T}$ lub $\mathcal{M}$. To, czy dostajemy całe $\mathcal{M}$, można łatwo rozstrzygnąć patrząc na działanie f na pierwszych homologiach powierzchni.

Kolejną ważną techniką użytą w pracy jest teoria nieeuklidesowych grup krystalograficznych (NEC). Pozwala ona bardzo konkretnie opisać iloraz powierzchni przez homeomorfizm f skończonego rzędu. Elementy grupy podstawowej Γ powierzchni oraz f zostają umieszczone razem w pewnej grupie Λ dyskretnie działającej na płaszczyźnie hiperbolicznej. To pozwala napisać jawne prezentacje Λ i Γ, oraz jawnie wyrazić dziedzinę fundamentalną Γ jako sklejenie kilku kopii dziedziny fundamentalnej Λ. Działanie f jest w tym przedstawieniu łatwo widoczne; łatwiej jest dzięki temu szukać pary standardowej I rodzaju $(c, f(c))$.

Wreszcie (jak należało się spodziewać) występują w pracy jawne rachunki w grupie $\mathcal{M}$, używające jej generatorów i kombinatoryki układów krzywych na powierzchni odpowiedzialnych za relacje. Są one dość złożone i wymagają dużej biegłości, gdyż niezbędna “relacja latarni” jest skomplikowana, angażuje generatory odpowiadające siedmiu różnym krzywym.

Wyniki.

W rozdziale drugim pokazane jest, że pojedyncza transpozycja wstęg normalnie generuje $\mathcal{M}$. (Argument polega na wskazaniu krzywej, która wraz ze swym obrazem tworzy parę standardową I rodzaju.) Choć dowód jest prosty, to samo twierdzenie należy skontrastować z faktem, że dotychczas znane zbiory generatorów $\mathcal{M}$ wymagały co najmniej dwóch różnych typów topologicznych homeomorfizmów. Następnie znaleziony jest skończony zbiór transpozycji wstęg generujący $\mathcal{M}$. Główym krokiem jest wyrażenie pojedynczego twistu Dehna przez transpozycje wstęg. Przydaje się do tego relacja latarni (która wiąże nieparzystą liczbę twistów Dehna); rachunki są dość złożone.

W rozdziale trzecim pokazane jest, że element torsyjny $\mathcal{M}$ rzędu co najmniej 3 normalnie generuje $\mathcal{T}$ (lub $\mathcal{M}$). Rzecz łatwo sprowadza się do elementu rzędu pierwszego p, lub elementu rzędu 4. Następnie użyta jest technika NEC w sposób już opisany. Przypadek rzędu 4 wymaga dość żmudnej szczegółowej analizy wielu podprzypadków. Jest godne uznania, że analiza ta została skutecznie przeprowadzona, dzięki czemu ostateczny wynik ma eleganckie ogólne sformułowanie.

W dalszej części rozdziału trzeciego analizowana jest możliwość generowania $\mathcal{T}$ przez inwolucje. Inwolucje powierzchni nieorientowalnej zostały sklasyfikowane przez Duggera. W rozprawie ta klasyfikacja została opisana w nieco inny, dużo bardziej jawny sposób, co jest, jak sądzę, bardzo wartościowe samo w sobie. Dzięki temu opisowi autorka rozstrzyga, które z inwolucji normalnie generują $\mathcal{T}$ (znów przez poszukiwanie par standardowych; część negatywna zaś poprzez działanie na pierwszych homologiach). Jako wniosek otrzymuje się istnienie inwolucji generującej normalnie $\mathcal{M}$ na każdej powierzchni (nieorientowalnej, z $g \geq 7$).

W rozdziale czwartym są pokazane (upraszczając nieco) dwa rodzaje wyników: po pierwsze, istnieją trzy sprzężone elementy rzędu k generujące $\mathcal{M}(N_k)$ (lub $\mathcal{T}(N_k)$); po drugie, dla g dostatecznie dużych istnieją trzy elementy rzędu k generujące $\mathcal{M}(N_g)$. Najpierw (lemat 4.1, wzięty od Laniera) przy użyciu relacji latarni pojedynczy twist Dehna zostaje wyrażony przez trzy odwzorowania odpowiednio działające na krzywych konstytuujących konfigurację latarni. Kolejny krok to konstrukcja modelu powierzchni z symetrią obrotową (dość standardowa). Wreszcie do tej symetrii obrotowej dobrane są jeszcze dwa przekształcenia realizujące konfigurację z lematu 4.1.

Ocena rozprawy.

Wyniki są oryginalne, wartościowe, niektóre zaskakujące. Mieszczą się w aktualnym nurcie badań. Nie jest dla mnie jasne, jakie będą ich zastosowania; sadzę jednak, że będą interesować specjalistów jako potencjalnie bardzo użyteczne fakty. Autorka wymienia we wstępie zastosowanie do przestrzeni moduli, co się chwali.

Techniki są dość różnorodne i używane z dużą kompetencją. Niektóre fragmenty pracy wymagały wytrwałości i żmudnej analizy, inne uzyskania wglądu w skomplikowaną sytuację kombinatoryczno-geometryczną, inne pomysłowości. Część idei jest zaczerpnięta od Laniera i Margalita, czego autorka nie ukrywa.

Redakcja.

Wzorcowa. Jest tło historyczne, opis uzyskanych wyników, preliminaria w których jest przypomniane/przytoczone wszystko co trzeba, dowody o równo utrzymanym (i bardzo mi pasującym) poziomie szczegółowości, świetne rysunki w stosownej (dużej) ilości. Idee są jasno wytłumaczone, (pod)przypadki rozważone w sposób kompletny (przyznam, że nie wszystkie szczegółowo przeczytałem).

(Żeby cośkolwiek krytycznego napisać: w 40_6 zamiast u_5u_6 powinno chyba być u_6u_5).

Podsumowanie.

Jest to bardzo dobra rozprawa doktorska, spełniająca wszelkie możliwe wymogi. Wnoszę o dopuszczenie kandydatki do dalszych etapów przewodu.

Jan Dymara