Gdańsk 11.02.2013

STRESZCZENIE ROZPRAWY DOKTORSKIEJ PIOTRA NOWAKA-PRZYGODZKIEGO "TYP HOMOTOPIJNY PRZESTRZENI ODWZOROWAŃ GRADIENTOWYCH"

1. Historia problematyki poruszanej w rozprawie

W latach osiemdziesiątych zeszłego stulecia profesor Kazimierz Gęba postawił następujący problem: czy istnieje lepszy niezmiennik niż zwykły stopień topologiczny dla homotopii w klasie odwzorowań gradientowych. W roku 1990 w pracy [14] A. Parusiński dał negatywną odpowiedź na to pytanie. Mianowicie udowodnił on, że jeśli dwa gradientowe pola wektorowe na dysku n-wymiarowym nieznikające na brzegu są homotopijne (mają ten sam stopień), to są również gradientowo homotopijne.

W [8, 9] J.C. Becker i D.H. Gottlieb wprowadzili pojęcie odwzorowania lokalnego oraz bardzo użyteczne uogólnienie pojęcia homotopii nazywane otopią. Główna korzyść z używania tych pojęć polega na tym, że otopia łączy ze sobą odwzorowania lokalne o niekoniecznie tej samej dziedzinie. Okazuje się, że problem profesora Gęby rozwiązany przez Parusińskiego pojawia się w sposób naturalny przy rozważaniu otopii pomiędzy odwzorowaniami lokalnymi.

Warto zauważyć, że wynik Parusińskiego stanowi wprowadzenie do badania typu homotopijnego rozważanych przestrzeni odwzorowań, ponieważ podaje klasyfikację składowych spójności przestrzeni gradientowych pól wektorowych.

W pracy nad własnościami przestrzeni odwzorowań lokalnych korzystaliśmy z aproksymacji do postaci generycznej o skończonej liczbie niezdegenerowanych punktów zerowych. Nasuwa to skojarzenie z przestrzeniami konfiguracji badanymi w [15] i [13] przez G. Segala i D. McDuff. Przedmiotem ich zainteresowania był m.in. typ homotopijny tychże przestrzeni.

Jeszcze jedną motywacją do badania (słabego) typu homotopijnego przestrzeni odwzorowań ciągłych oraz gradientowych stanowi nakreślony w książce [12] przez M. Gromova program mający na celu ustalenie relacji pomiędzy przestrzenią odwzorowań a jej podprzestrzeniami określonymi warunkami zadanymi za pomocą pochodnych cząstkowych. W szczególności gradientowość można wyrazić za pomocą warunku Schwarza.

Warto wspomnieć, że w pracy [1] autorzy zdefiniowali stopień topologiczny w przypadku ciągłym i gradientowym dla lokalnych odwzorowań G-współzmienniczych.

W niniejszym streszczeniu rozdział drugi składa się z dwóch części tematycznych. Każda część omawia dwa artykuły, w sumie cztery (trzy opublikowane, jeden zaakceptowany), których dotyczy moja rozprawa.

Natomiast w trzecim rodziale są krótko opisane dwa artykuły znajdujące się jeszcze w recenzji, które stanowią kontynuację wcześniejszych badań. W rozdziale tym wspominam również o otwartych pytaniach związanych z rozważaną tematyką.

Wszystkie omawiane artykuły powstały w wyniku współpracy z dr. Piotrem Bartłomiejczykiem. Chciałbym tu również podziękować za opiekę naukową mojemu promotorowi dr. hab. Grzegorzowi Graffowi, prof. nadzw. PG.

2. Omówienie wyników prac składających się na rozprawę

2.1. Gradientowe pola wektorowe na dysku. Wspomniane wcześniej twierdzenie Parusińskiego można również sformułować w następujący sposób: inkluzja przestrzeni gradientowych pól wektorowych w przestrzeń wszystkich ciągłych pól wektorowych określonych na dysku D^n nieznikających na S^{n-1} indukuje bijekcję pomiędzy zbiorami składowych spójności tych przestrzeni funkcyjnych.

Oryginalny dowód twierdzenia Parusińskiego opiera się na indukcji ze względu na wymiar dysku. W wymiarze $n = 2$ mamy dwa przypadki stopnia równego i różnego od 1. Trudniejszy jest ten pierwszy przypadek, w którym Parusiński pokazał, że każde pole gradientowe jest gradientowo homotopijne z identycznością lub minus identycznością. W pracy [4] udało nam się uzupełnić niewielką lukę pokazując (dwiema różnymi metodami), że identyczność i minus identyczność są również gradientowo homotopijne. Nasza praca zawiera pełny dowód przypadku $n = 2$ kładący nacisk na przedstawienie geometrycznych aspektów rozumowania.

W kolejnej pracy [5] rozwijamy te geometryczne idee, co pozwala nam wzmocnić wynik dla $n = 2$. Mianowicie wspomniana inkluzja jest faktycznie homotopijną równoważnością. Wyprowadzamy stąd wniosek, że obie przestrzenie pól wektorowych (gradientowych i ciągłych) są homotopijnie równoważne S^1.

Dokładnie rzecz ujmując zostało to udowodnione w [14] dla przypadku stopnia różnego od 1. Nam się udało przeprowadzić dowód w przypadku stopnia równego 1, który to przypadek okazał się o wiele trudniejszy.

2.2. **Gradientowe odwzorowania lokalne.** Pytanie profesora Gęby, którym zajął się Parusiński, można postawić w odniesieniu do przestrzeni odwzorowań lokalnych: czy dwa gradientowe odzorowania lokalne o tym samym stopniu są gradientowo otopijne?

Przypomnijmy, że odwzorowanie lokalne $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy właściwym, jeśli przeciwobraz f każdego zbioru zwartego jest zwarty. Wprowadźmy następujące oznaczenia w wymiarze n:

- $\mathcal{F}[n]$ – klasy otopii odwzorowań lokalnych,
- $\mathcal{F}_\nabla[n]$ – klasy gradientowych otopii gradientowych odwzorowań lokalnych,
- $\mathcal{P}[n]$ – klasy właściwych otopii właściwych odwzorowań lokalnych,
- $\mathcal{P}_\nabla[n]$ – klasy właściwych gradientowych otopii właściwych gradientowych odwzorowań lokalnych.

Odpowiednie inkluzje indukują następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_\nabla[n] & \xrightarrow{\mathfrak{a}} & \mathcal{P}[n] \\
\mathfrak{b}\big\downarrow & & \big\downarrow\mathfrak{c} \\
\mathcal{F}_\nabla[n] & \xrightarrow{\mathfrak{d}} & \mathcal{F}[n].
\end{array}$$

Wprowadzenie przestrzeni właściwych odwzorowań lokalnych jest uzasadnione tym, że przetrzeń ta jest wyposażona w ładną, metryczną topologię (patrz [9]).

W [2] pokazaliśmy, że funkcje $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ są surjekcjami, natomiast funkcje $\mathfrak{c}$ i $\mathfrak{d}$ są bijekcjami. Główna trudność polegała tutaj na udowodnieniu wersji twierdzenia Hopfa dla $\deg\colon \mathcal{F}_\nabla[n] \to \mathbb{Z}$.

W [3] udało nam się istotnie wzmocnić powyższy wynik pokazując, że funkcje $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{b}$ również są bijekcjami. Ogólny schemat rozumowań jest podobny w obydwu powyższych pracach, jednak w przypadku odwzorowań właściwych napotkaliśmy szereg trudności technicznych wymagających wprowadzenia nowych pojęć i wymyślenia pewnych nowych idei.

3. Przestrzenie odwzorowań lokalnych - dalsze perspektywy

Chciałbym na zakończenie dodać kilka słów o pracach, które znajdują się obecnie w recenzji, a stanowią kontynuację wyników składających się na rozprawę.

W pracy [6] wprowadzamy topologię w zbiorze odwzorowań lokalnych oraz dowodzimy prawo wykładnicze dla odwzorowań lokalnych oraz właściwych. Ponadto pokazujemy, że inkluzja przestrzeni odwzorowań właściwych w przestrzeń odwzorowań lokalnych jest słabą homotopijną równoważnością. A słaby typ homotopijny $\mathcal{P}(n)$ jest nam znany.

Z kolei w pracy [7] dowodzimy, że przestrzenie powyższe nie są jednak homotopijnie równoważne dla $n > 1$. Przypadek $n = 1$ pozostaje nadal otwartym problemem.

W kwestii typu homotopijnego pozostaje tu wiele jeszcze innych znaków zapytania. Na przykład czy inkluzja przestrzeni odwzorowań gradientowych w przestrzeń odwzorowań lokalnych jest (słabą) homotopijną równoważnością. To samo pytanie można postawić dodając założenie właściwości odwzorowań.

Wart zainteresowania w kontekście powyższych problemów jest również przypadek G-niezmienniczy, który otwiera zupełnie nowy obszar do zbadania.

Reasumując, tematyka powyższa wydaje mi się ciekawa i rozwojowa. Zamierzamy z dr Bartłomiejczykiem kontynuować ten kierunek pracy naukowej.

Literatura

[1] P. Bartłomiejczyk, K. Gęba, M. Izydorek, *Otopy classes of equivariant local maps*, J. Fixed Point Theory and Appl. 25 (2010), 195–203.

[2] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *Gradient otopies of gradient local maps*, Fund. Math. vol. 214 No 1 (2011), 89–100.

[3] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *Proper gradient otopies*, Topol. Appl. 159 (2012), 2570–2579.

[4] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *Path components of the space of gradient vector fields on the two dimensional disc*, to appear in Mathematica Slovaca.

[5] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *The homotopy type of the space of gradient vector fields*, Glasgow Mathematical Journal 54 (2012), 619–626.

[6] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *The exponential law for partial, local and proper maps and its application to otopy theory*, submitted.

[7] P. Bartłomiejczyk, P. Nowak-Przygodzki, *On the homotopy equivalence of the spaces of proper and local maps*, submitted.

[8] J. C. Becker, D. H. Gottlieb, *Vector fields and transfers*, Manuscripta Math. 72 (1991), 111–130.

[9] J. C. Becker, D. H. Gottlieb, *Spaces of local vector fields*, Contemp. Math. 227 (1999), 21–28.

[10] E. N. Dancer, K. Gęba, S. Rybicki, *Classification of homotopy classes of gradient equivariant maps*, Fund. Math. 185 (2005), 1–18.

[11] D. H. Gottlieb, G. Samaranayake, *The index of discontinuous vector fields*, New York J. Math. 1 (1994), 130–148.

[12] M. Gromov, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[13] D. McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, Topology 14 (1975), 91–107.

[14] A. Parusiński, *Gradient homotopies of gradient vector fields*, Studia Math. XCVI (1990), 73–80.

[15] G. Segal, *Configuration spaces and iterated loop spaces*, Invent. Math. 21 (1973), 213–221.