Układy pasywne RLC

1. Czas trwania: 6h

2. Cele ćwiczenia

- Badanie własności prostych pasywnych układów RLC.
- Badanie szeregowego obwodu rezonansowego RLC.

3. Wymagana znajomość pojęć

- działania na liczbach zespolonych,
- zachowanie układów RLC przy pobudzeniu sinusoidalnym, impulsowym i schodkowym,
- impedancja,
- pasmo przenoszenia,
- wzmocnienie K_u i K_{dB},
- charakterystyki Bodego,
- wykresy wskazowe,
- trzydecybelowa częstotliwość graniczna,
- rezonans i częstotliwość rezonansowa,
- dobroć obwodu rezonansowego.

4. Wstęp

4.1 Uogólnione prawo Ohma

Przeprowadzając analizę obwodów prądu zmiennego, w stanie ustalonym, przy pobudzeniu sinusoidalnym wygodnie jest zastąpić chwilowe wartości prądów i napięć ich odpowiednikami w dziedzinie liczb zespolonych:

$$U(t)=U_0\sin(\omega t+\varphi) \quad \rightarrow \quad \mathbf{U}=\mathbf{U_0}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$I(t)=I_0\sin(\omega t+\varphi) \quad \rightarrow \quad \mathbf{I}=\mathbf{I_0}e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Prawdziwe wartości napięć i prądów otrzymujemy biorąc część rzeczywistą rozwiązania zespolonego:

$$U(t)=\mathrm{Re}(\mathbf{U_0}e^{j(\omega t+\varphi)}).$$

Uogólnione prawo Ohma stwierdza, że zespolony prąd **I** w obwodzie jest proporcjonalny do zespolonego napięcia **U**:

$$\mathbf{I}=\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}$$

gdzie współczynnik **Z** nosi nazwę *impedancji*. Impedancja w ogólności jest liczbą zespoloną:

$$Z=R+jX$$

wielkość R to *rezystancja* a X to *reaktancja*. Jednostką impedancji jest Ohm.

Wygodnie jest także wprowadzić pojęcie *admitancji* (odwrotność impedancji), której jednostką jest Siemens (S):

$$Y=\frac{1}{Z}=G+jB$$

wielkość G to *konduktancja* a B *susceptancja*.

4.2 Trygonometryczny szereg Fourier'a

Funkcję okresową f(t) o okresie T, pod warunkiem spełnienia warunków Dirichleta (funkcja musi być bezwzględnie całkowalna, musi posiadać skończoną liczbę ekstremów i punktów nieciągłości) można przedstawić w postaci rozwinięcia w trygonometryczny szereg Fourier'a postaci:

$$f(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\right]$$

gdzie:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

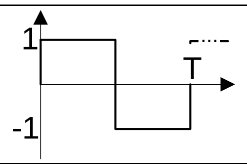
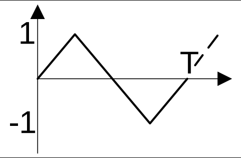
jest pulsacją podstawową,

$$a_0=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}f(t)dt$$

jest średnią wartością funkcji f(t), oraz:

$$a_k=\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t)\cos(k\omega t)dt \quad \text{i} \qquad b_k=\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

są amplitudami składowych harmonicznych przebiegu f(t).

	$f(t)=\frac{4}{\pi}\cdot\left[\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+...\right]$
	$f(t)=\frac{8}{\pi^2}\cdot\left[\sin(\omega t)-\frac{1}{3^2}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)-...\right]$

Tab. 1 Rozwinięcie Fouriera przykładowych przebiegów okresowych

4.3 Przekształcenie Laplace'a

Przekształcenie Laplace'a przekształca funkcję x(t) na funkcję **X**(**s**) zmiennej zespolonej **s**:

$$\mathbf{X}(\mathbf{s})=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}dt$$

Odwrotne przekształcenia Laplace'a przekształca funkcję **X**(**s**) na funkcję x(t):

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{X}(\mathbf{s})\cdot e^{st}d\mathbf{s}$$

Ogólniejsza metoda operatorowa bazująca na przekształceniu Laplace'a umożliwia analizę obwodu w stanie nieustalonym oraz przy dowolnym pobudzeniu. Po rozwiązaniu równań operatorowych przejście do dziedziny czasu uzyskuje się stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a.

4.4 Reaktancja pojemnościowa.

Natężenie prądu płynącego przez kondensator o pojemności C wyraża się wzorem:

$$i(t)=C\frac{du(t)}{dt}$$

gdzie C jest pojemnością kondensatora i jest wyrażana w Faradach.

W przypadku pobudzenia sinusoidalnego prąd i napięcie można wyrazić w postaci zespolonej, stąd równanie przyjmuje postać:

$$Ie^{j\omega t}=C\frac{d}{dt}\left(U_O e^{j\varphi}e^{j\omega t}\right)=Cj\omega U_O e^{j\varphi}e^{j\omega t}$$

po przekształceniach otrzymujemy:

$$\mathbf{I}=j\omega C\mathbf{U}=\omega C\mathbf{U}e^{j90^\circ} \qquad \text{skąd:} \qquad Z_C=\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}=\frac{1}{j\omega C}$$

Jak widać na pojemności napięcie jest opóźnione w stosunku do prądu o $\frac{\pi}{2}$.

4.5 Reaktancja indukcyjna

Indukowana w cewce indukcyjnej SEM jest konsekwencją zmiany strumienia magnetycznego:

$$u(t)=L\frac{d\Phi(t)}{dt} \qquad \text{ponieważ:} \qquad \Phi(t)=L\cdot i(t)$$

$$u(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

gdzie L jest indukcyjnością cewki i jest wyrażana w Henrach.
Dokonując przekształceń w dziedzinie liczb zespolonych otrzymujemy:

$$Ue^{j\omega t}=j\omega LI_0e^{j\omega t}=\omega LI_0\, e^{j90^\circ}e^{j\omega t} \qquad \text{skąd:} \qquad Z_L=j\omega L$$

Jak widać na indukcyjności napięcie wyprzedza prąd o $\frac{\pi}{2}$.

Rezystancja	reaktancja pojemnościowa	reaktancja indukcyjna
$Z_R=R$	$Z_C=\frac{1}{j\omega C}$	$Z_L=j\omega L$

Tab. 2 Impedancja rezystora, kondensatora i indukcyjności

Reaktancje Z_C i Z_L w odróżnieniu od rezystancji Z_R zależą od pulsacji ω.

4.6 Moc średnia

Moc średnią przebiegu okresowego wyznacza się ze wzoru:

$$P_{śr}=\mathrm{Re}(\mathbf{U}\cdot\mathbf{I}^*)=\frac{1}{T}\int_0^T U(t)I(t)dt$$

Dla przebiegu sinusoidalnego:

$$P_{śr}=\frac{1}{2}U_0\cdot I_0 \quad \text{lub napięcie (natężenie) skuteczne:} \quad U_{sk}=\frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

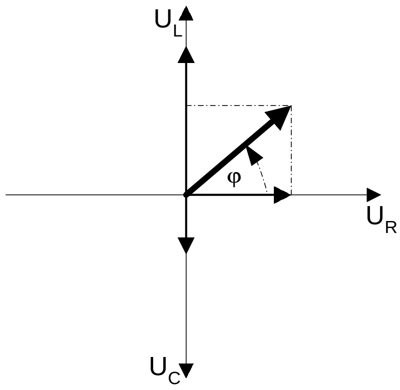
Dobroć Q układu jest miarą stosunku energii gromadzonej w układzie do energii traconej na ciepło.

	Rezystor	Kondensator	induktor
Równanie różniczkowe Napięcie	$U(t)=I(t)\cdot R$	$U_C(t)=\frac{1}{C}\int I_C(t)dt$	$U_L(t)=L\frac{dI_L(t)}{dt}$
Równanie różniczkowe Prąd	$I(t)=\frac{U(t)}{R}$	$I_C(t)=C\frac{dU_C(t)}{dt}$	$I_L(t)=\frac{1}{L}\int U_L(t)dt$
Metoda symboliczna rozkład Fourier'a	$U_R=R\cdot I_R$	$U_C=\frac{1}{j\omega}I\cdot C$	$U_L=j\omega\cdot L$
Rachunek operatorowy Transformata Laplace'a	$U_R(s)=R\cdot I_R(s)$	$U_C(s)=\frac{1}{sC}I_C(s)$	$U_L(s)=sLI_L(s)$

Tab. 3 Różne postaci uogólnionego prawa Ohma

4.7 Wykresy wskazowe

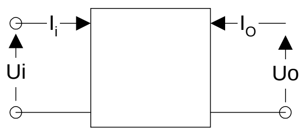
Ponieważ wartości $\mathbf{U_R}$, $\mathbf{U_L}$ i $\mathbf{U_C}$ są wielkościami wektorowymi czasami wygodnie jest przedstawiać zależności pomiędzy składowymi w układzie współrzędnych x-y (wykres wskazowy). Na osi x zaznacza się składowe rzeczywiste (rezystancyjne) a na osi y składowe urojone (reaktancyjne). Proste przekształcenia geometryczne ułatwiają analizę układu. Wektor wypadkowy co do wartości jest równy sile elektromotorycznej źródła a kąt φ reprezentuje wypadkową fazę.



Rys. 1. Wykres wskazowy.

4.8 Elementy teorii czwórników

Czwórnik to dowolny układ o czterech końcówkach, który można całkowicie opisać za pomocą prądów i napięć wejściowych i wyjściowych (U_i, I_i, U_o, I_o) oraz ogólnych impedancyjnych (**z**) lub admitancyjnych (**y**) równań macierzowych:



Rys. 2 Czwórnik

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_i \\ I_o \end{bmatrix}$$

Elementy macierzy impedancyjnej czwórnika mają następujący sens fizyczny:

$z_{11} = \frac{U_i}{I_i}$ jest impedancją wejściową przy rozwartym wyjściu (I_o=0)

$z_{12} = \frac{U_i}{I_o}$ jest impedancją wzajemną przy rozwartym wejściu (I_i=0)

$z_{21}=\frac{U_o}{I_i}$ jest impedancją wzajemną przy rozwartym wyjściu (I_o=0)

$z_{22}=\frac{U_O}{Io}$ jest impedancją wyjściową przy rozwartym wejściu (I_i=0)

Zależność pomiędzy sygnałem wejściowym a wyjściowym czwórnika można również opisać za pomocą pojęcia wzmocnienia napięciowego (i/lub prądowego):

$$K_u=\frac{U_O}{Ui} \qquad K_i=\frac{I_O}{Ii}$$

Wzmocnienie zwykle jest przedstawiane w skali decybelowej:

$$K_{dB}=10\cdot\log\left(\frac{P_o}{P_i}\right) = 20\cdot\log\left(\frac{U_o}{U_i}\right)$$

Czwórniki można łączyć na wiele sposobów, a ich macierze przekształcać. Dla przykładu macierz admitancyjna równoległego połączenia czwórników y1 i y2 wynosi:

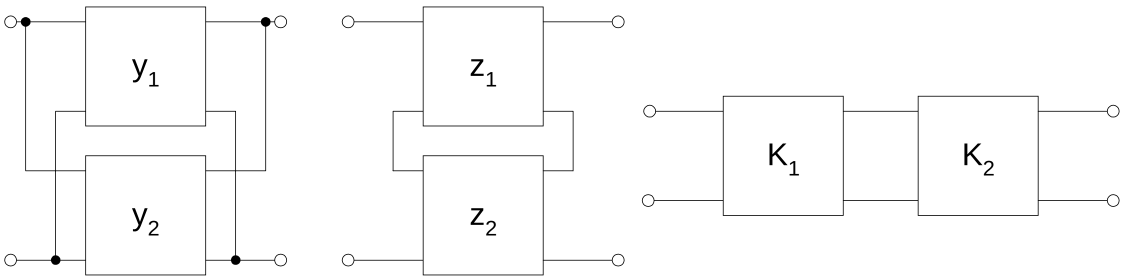
$$\mathbf{y}=\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$$

a macierz impedancyjna szeregowego połączenia:

$$\mathbf{z}=\mathbf{z}_1+\mathbf{z}_2$$

Wzmocnienie kaskadowo połączonych czwórników:

$$K=K_1\cdot K_2 \qquad \text{lub} \qquad K_{dB}=K_{dB1}+K_{dB2}$$



Rys. 3 Równoległe, szeregowe i kaskadowe połączenie czwórników

4.9 Charakterystyka częstotliwościowa. Transmitancja

W układy liniowe opisuje się często za pomocą pojęcia transmitancji.
Transmitancją od niezerowego pobudzenia x(t) do odpowiedzi y(t) nazywamy stosunek transformaty Laplace'a odpowiedzi układu Y(s) do transformaty pobudzenia X(s):

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

Dla układu opisanego transmitancją H(s) odpowiedź Y(s) jest iloczynem transmitancji i wymuszenia X(s):

$$Y(s)=X(s)\cdot H(s)$$

Odpowiedź układu w dziedzinie czasu y(t) sprowadza się do odwrotnej transformaty Y(s) lub splotu wymuszenia x(t) i odwrotnej transformaty Laplace'a transmitancji h(t):

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\xi)h(t-\xi)d\xi \qquad \text{gdzie symbol "*" oznacza operację splotu}$$

W przypadku gdy sygnałem pobudzającym jest impuls Dirac'a:

$$\delta(t)=0 \;\; \text{dla} \;\; t\neq 0$$

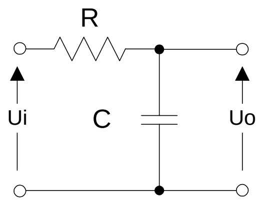
(którego transformatą jest X(s)=1) odpowiedź układu jest identyczna z transmitancją. Odwrotna transformata Laplace'a transmitancji układu jest więc jego odpowiedzią na impuls Dirac'a.

W stanie ustalonym, transmitancja H(s) może być przedstawiona jako transmitancja częstotliwościowa (widmowa) k(jω), która w ogólności jest liczbą zespoloną:

$$k(j\omega)=|k(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

Moduł transmitancji częstotliwościowej nazywamy charakterystyka amplitudową (wzmocnieniem) a czynnik φ(ω) charakterystyką fazową. Charakterystykę amplitudową przedstawia się w skali decybelowej.

4.10 Filtr dolnoprzepustowy RC



Rys. 4 Dolnoprzepustowy filtr RC

Układ RC przedstawiony na rys. 4 jest w ogólności dzielnikiem impedancyjnym, którego transmitancja operatorowa wynosi:

$$K_u(s)=\frac{U_O(s)}{U_I(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{1+sRC}$$

4.11 Pobudzenie filtru dolnoprzepustowego RC uskokiem jednostkowym

Zakładając, że funkcja pobudzająca jest uskokiem jednostkowym:

$$Ui(t)=\begin{cases}0 \text{ dla } t<0\\ U \text{ dla } t\geq 0\end{cases}$$

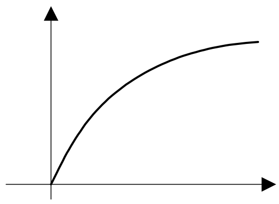
po wyliczeniu odwrotnej transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego otrzymujemy:

$$U_o(t)=U\cdot(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

wielkość:

$$\tau=RC$$

nazywamy stałą czasową układu.



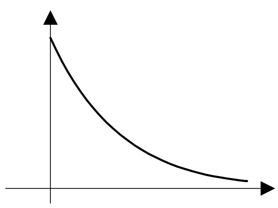
Rys. 5 Odpowiedź filtru dolnoprzepustowego na uskok jednostkowy

Stała czasowa filtru RC liczbowo odpowiada czasowi, po którym sygnał zmieni się e-krotnie.

4.12 Pobudzenie filtru dolnoprzepustowego RC impulsem jednostkowym

Zakładając, że funkcją pobudzającą jest impuls Dirac'a, odpowiedzią układu w dziedzinie czasu jest odwrotna transformata Laplace'a transmitancji stąd:

$$U_o(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$



Rys. 6 Odpowiedź filtru DP na impuls Dirac'a

4.13 Stan ustalony w dolnoprzepustowym filtrze RC

Dokonując formalnego podstawienia s=jω transmitancję napięciową układu RC można przedstawić jako:

$$K_u(j\omega)=\frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)}$$

gdzie

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{1}{\tau}$$

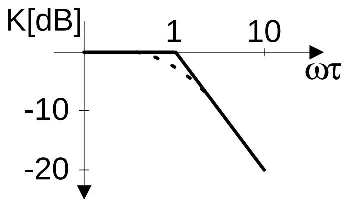
jest pulsacją graniczną.

4.14 Charakterystyki Bodego dolnoprzepustowego filtru RC

Charakterystykę częstotliwościową układu przedstawia się jako funkcję modułu wzmocnienia w dB w skali logarytmicznej: $K_{dB}=f(\log(\omega))$. Po dokonaniu uproszczeń moduł transmitancji filtru dolnoprzepustowego RC można zapisać:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{dla } \omega<\omega_0 \\ \frac{1}{\omega\tau} & \text{dla } \omega>\omega_0 \end{cases}$$

funkcję tę można przedstawić za pomocą odcinków linii prostych.
Dla $\omega<\omega_0$ wzmocnienie jest stałe i kąt przesunięcie jest równy zero. Dla $\omega>\omega_0$ charakterystyka opada z szybkością –20dB/dekadę a kąt przesunięcia fazowego dąży do $-\pi/2$.



Rys. 7 Charakterystyka Bodeg'o filtru dolnoprzepustowego

W punkcie ω_0:

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{1+j\cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

charakterystyka amplitudowa opada o 3dB a przesunięcie fazowe wynosi $-\pi/4$.
Pasmo przenoszenia określa się jako zakres częstotliwości, w których tłumienie nie zmienia się więcej niż 3dB.

Filtr dolnoprzepustowy RC w paśmie zaporowym może być również traktowany jako układ całkujący:

$$H(s)=\frac{1}{sRC}$$

Ponieważ operator 1/s, w dziedzinie czasu, odpowiada całkowaniu stąd:

$$U_o(t)=\frac{1}{RC}\int U_I(t)dt$$

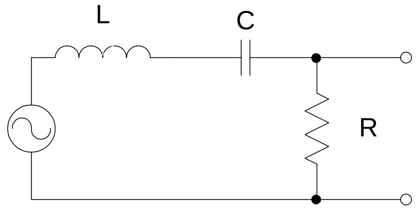
4.15 Pobudzenie filtru dolnoprzepustowego RC dowolnym sygnałem okresowym

Stan ustalony na wyjściu układu liniowego może być wyliczony jako suma odpowiedzi przy pobudzeniu kolejnymi harmonicznymi sygnału wejściowego.

W filtrze dolnoprzepustowym RC tłumione są wyższe harmoniczne a postać sygnału wyjściowego zależy zarówno od sygnału wejściowego jak i od stałej czasowej filtru. Dla przykładu przy pobudzeniu filtru dolnoprzepustowego o stałej czasowej τ przebiegiem prostokątnym o częstotliwości $\omega>1/\tau$ sygnał wyjściowy będzie przypominał przebieg sinusiodalny...

4.16 Układ RLC (obwód rezonansowy)

W szeregowym obwodzie rezonansowym płynący prąd można wyrazić jako równanie operatorowe:



Rys. 8. Szeregowy układ rezonansowy RLC.

$$I(s)=\frac{U(s)}{\left(R+sL+\frac{1}{sC}\right)}$$

Rozwiązanie w dziedzinie czasu można uzyskać stosując odwrotną transformatę Laplace'a:

$$i(t)=\frac{U}{L\beta}e^{-\delta t}\sinh(\beta t) \quad \text{gdzie: } \delta=\frac{R}{2L} \;\text{ i }\; \beta=\sqrt{\delta 2-\frac{1}{LC}}$$

W zależności od tłumienia δ otrzymuje się trzy rozwiązania: periodyczne, aperiodyczne i krytyczne.

Impedancja szeregowa obwodu wynosi:

$$Z=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}$$

a jej moduł:

$$|Z|=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

W stanie rezonansu następuje zerowanie reaktancji (znoszenie się składowych napięciowych na kondensatorze i indukcyjności). Częstotliwość rezonansowa wynosi:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

a prąd płynący w obwodzie osiąga wartość maksymalną:

$$I_{max}=\frac{U}{R}$$

Układ RLC może być traktowany jako filtr tłumiący wszystkie częstotliwości za wyjątkiem ω_0. Kształt charakterystyki amplitudowej k(jω) w znacznym stopniu zależy od dobroci układu:

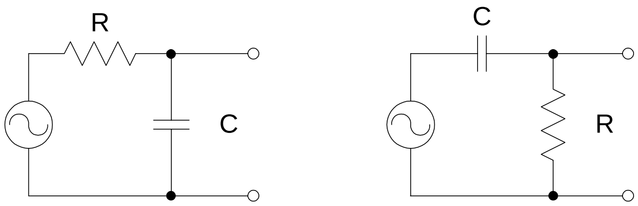
$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}$$

Im większa dobroć tym mniejsze pasmo przenoszenia układu RLC.

5. Zadania pomiarowe

5.1. Układy filtrów RC.

1. Zrealizować układy filtrów przedstawione na rys. 9. Na wejście układu, i do wejścia kanału A oscyloskopu podać sygnał sinusoidalny z generatora. Sygnał wyjściowy z filtru doprowadzić do kanału B oscyloskopu. Zmierzyć charakterystykę częstotliwościową filtrów. Wyniki zanotować w tabeli w przedstawić na wykresie Bodego. Na podstawie wartości R i C wyliczyć stałą czasową filtru i porównać ją z wartością zmierzoną doświadczalnie. Przyjąć U_{WE}=10V_{PP}, R=10kΩ i C=2.2nF.
2. Zbadać działanie układu różniczkującego i całkującego W tym celu należy na wejście układu podać przebieg a)sinusoidalny i b)prostokątny o okresie a)mniejszym i b)większym niż stała czasowa układu i obserwować na ekranie oscyloskopu kształt przebiegu wyjściowego. Odrysować oscylogramy. Skomentować otrzymane wyniki.



Rys. 9. Filtr dolno i górno przepustowy.

f [Hz]	100	500	...	100kHz
U_{WY} [V]				
$K_{dB}=20\lg(U_{WY}/U_{WE})$				

Tab. 4. Charakterystyka częstotliwościowa filtru RC.

4.2. Szeregowy obwód rezonansowy RLC.

Zrealizować obwód rezonansowy przedstawiony na rys. 8. Na wejście układu, i do wejścia kanału A oscyloskopu podać sygnał sinusoidalny z generatora. Sygnał wyjściowy z filtru doprowadzić do kanału B oscyloskopu. Zmierzyć charakterystykę częstotliwościową filtrów. Wyniki zanotować w tabeli w przedstawić na wykresie Bodego. Na podstawie wartości R, L i C wyliczyć częstotliwość rezonansową filtru oraz jego dobroć i porównać z wartościami zmierzonymi doświadczalnie. Oszacować pasmo przenoszenia filtru. Przyjąć U_{WE}=10V_{PP}, R=1kΩ, L=33mH i C=2.2nF. Powtórzyć pomiar dla R=340Ω. Jak wartość R wpływa na dobroć i pasmo przenoszenia?

Dla częstotliwości rezonansowej f_0 oraz częstotliwości co najmniej $0.1f_0$ i $10f_0$ narysować wykresy fazowe. W tym celu należy dla ustalonej częstotliwości zmierzyć wartości napięć na poszczególnych elementach oraz na całym obwodzie. Napięcia należy mierzyć przy użyciu oscyloskopu i sondy. W szczególności w celu pomiaru napięcia na elementach L i C należy do ich obu końców podłączyć dwie sondy przyłączone do kanałów A i B oscyloskopu. Właściwe napięcie należy odczytać po ustawieniu oscyloskopu do wykonania operacji A-B. Alternatywnie, do pomiaru zamienić miejscami elementy L i C z rezystorem R. Wykonując wykresy należy pamiętać o zależnościach fazowych pomiędzy napięciami na rezystorze, kondensatorze i cewce.

Uwaga do pomiaru należy używać sondy oscyloskopowej.

6. Przyrządy
Generator, miernik uniwersalny, oscyloskop.

7. Literatura
P.Horowitz, W.Hill, „Sztuka elektroniki”, WKŁ 1995, ISBN 83-206-1128-8, Tom 1, str.33-55.
R.Śledziewski, „Elektronika dla fizyków”, PWN 1982, ISBN 83-01-04076-9, str.75-100.
M. Purcell, „Elektryczność i magnetyzm”, PWN 1974, Rozdział 8.

