Autoreferat

dr Wojciech Czernous

Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

1. Posiadane dyplomy

1) dyplom magistra matematyki w zakresie informatyki i metod numerycznych uzyskany na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego, 8 stycznia 2004 roku,

2) dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego, 18 maja 2006 roku.

2. Zatrudnienie w jednostkach naukowych

1) 1 lutego 2004 - 30 września 2006 – asystent na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej,

2) od 1 października 2006 – adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego.

3. Wskazane osiągnięcia wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki

Wskazane osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi cykl sześciu prac pod tytułem:

Istnienie i aproksymacja rozwiązań zagadnień początkowo brzegowych dla równań Hamiltona-Jacobiego z zależnością funkcyjną.

3.1. Lista prac

[R1] W. Czernous, Infinite systems of first order PFDEs with mixed conditions.*Annales Polonici Mathematici* **94** (2008), no. 3, 209–230, doi: 10.4064/ap94-3-2.

[R2] W. Czernous, Classical solutions of hyperbolic IBVPs with state dependent delays.*Nonlinear Oscillations* **13** (2011), no. 4, 595–612, doi: 10.1007/s11072-011-0134-4.

[R3] W. Czernous, Semilinear hyperbolic functional differential problem on a cylindrical domain.*Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **19**(2012), no. 1, 1–17, *http://projecteuclid.org/euclid.bbms/1331153404*.

[R4] W. Czernous, Classical solutions of hyperbolic IBVPs with state dependent delays on a cylindrical domain.*Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications* **75**(2012), no. 17, 6325–6342, doi: 10.1016/j.na.2012.07.014.

[R5] W. Czernous, Generalized implicit Euler method for hyperbolic functional differential equations.*Mathematische Nachrichten* **283** (2010), no. 8, 1114–1133, doi: 10.1002/mana.200710067.

[R6] W. Czernous, Numerical method of bicharacteristics for hyperbolic partial functional differential equations.*Calcolo* **46** (2009), no. 1, 1–24, doi: 10.1007/s10092-009-0156-9.

3.2. Omówienie wyników uzyskanych w cyklu prac, który jest osiągnięciem wynikającym z art. 16 ust. 2 ustawy o stopniach naukowych oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki

Wyróżnionym przez mnie osiągnięciem, które stanowi podstawę do wszczęcia postępowania habilitacyjnego jest cykl sześciu artykułów dotyczący zagadnień początkowo brzegowych dla równań Hamiltona-Jacobiego z zależnością funkcyjną. Celem prac było poszerzenie wiedzy o istnieniu rozwiązań klasycznych tych zagadnień i o metodach ich aproksymacji numerycznej, przy zwróceniu uwagi na wzbogacenie klas zależności funkcyjnych, występujących w tych równaniach. Rozwinięcie tej ostatniej kwestii zamieszczam poniżej, poprzedzone wprowadzeniem zagadnienia różniczkowo funkcyjnego.

3.2.1. Wprowadzenie

3.2.1.1. Zagadnienie różniczkowe i różne typy zależności funkcyjnej

Zasadniczym problemem, któremu poświęcony jest prezentowany cykl publikacji, jest równanie Hamiltona-Jacobiego

$$\partial_t z(t,x) = f(t,x,V(z;t,x),\partial_x z(t,x)) \tag{1}$$

na zbiorze cylindrycznym $E = [0,a] \times \overline{\Omega}$ z warunkiem początkowo brzegowym

$$z(t,x) = \varphi(t,x) \quad \text{na} \quad E_0 \cup \partial_0 E, \tag{2}$$

gdzie $a > 0$, $d_0 \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest prostopadłościanem lub zbiorem o regularnym brzegu, zaś $E_0 = [-d_0, 0] \times \overline{\Omega}$, $\partial_0 E = (0,a] \times \partial\Omega$. Rozważamy rozwiązania klasyczne, to znaczy funkcje różniczkowalne w sposób ciągły, których pochodne są lipschitzowskie (którą to klasę będziemy oznaczać symbolem $C^{1.L}$) spełniające (1) we wszystkich punktach zbioru E; a także rozwiązania uogólnione w sensie Carathéodory'ego, to znaczy funkcje absolutnie ciągłe, spełniające (1) prawie wszędzie na E.

W modelach zależności funkcyjnej używamy wielowymiarowego operatora Hale'a,

$$(t,x) \mapsto z_{(t,x)} \in C(D,\mathbb{R}), \quad z_{(t,x)}(s,y) = z(t+s,x+y).$$

Dziedziną funkcji f jest $E \times C(D,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, zaś operator V działa z przestrzeni $C(E^*) \times [0,a] \times \overline{\Omega}$ w przestrzeń $C(D,\mathbb{R})$, przy czym

$$E^* = E_0 \cup E \cup \partial_0 E.$$

Ponieważ nie zajmujemy się wyprzedzonym argumentem, o V zakładamy w prezentowanych pracach, że

$$z\Big|_{E_t^*} \equiv \bar{z}\Big|_{E_t^*} \qquad \text{implikuje} \qquad V(z;\tau,x) \equiv V(\bar{z};\tau,x) \quad \text{dla} \quad (\tau,x) \in E_t,$$

gdzie

$$E_t^* = \{(\tau,x) \in E^* : \tau \leq t\}, \quad E_t = \{(\tau,x) \in E : \tau \leq t\}, \qquad t \in (0,a].$$

Przedstawiane wyniki obejmują zarówno równania z odchylonym argumentem, jak i równania różniczkowo-całkowe. Założenia o regularności f mogą być przy tym łatwo sprawdzone; bowiem, definiując f przy pomocy innej funkcji $F : [0,a] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jako

$$f(t,x,w,q) = F(t,x,w(0,0),q)$$

otrzymujemy równanie z odchylonym argumentem (przynajmniej dla $V(z;t,x) \not\equiv z_{(t,x)}$), zaś przy definicji

$$f(t,x,w,q) = F(t,x,\int_D K(t,x;s,y)w(s,y)\,ds\,dy,q)$$

otrzymujemy równanie różniczkowo całkowe.

W literaturze pojawiają się również inne modele zależności funkcyjnej. Pierwsze wyniki otrzymano dla zagadnienia początkowego dla równania

$$\partial_t z(t,x) = G(t,x,z,\partial_x z(t,x)),$$

gdzie argument funkcyjny G oznaczony jest przez z. Twierdzenia o istnieniu rozwiązań dla tak zdefiniowanego problemu mają proste założenia, a ich dowody są bardzo naturalne (patrz [28, 29]). Niestety, klasa zagadnień obejmowanych przez taki model jest wąska.

Jest wiele prac (np. [2, 15, 30]) dotyczących zagadnienia początkowego dla równania

$$\partial_t z(t,x) = H(t,x,W[z](t,x),\partial_x z(t,x)),$$

gdzie W jest operatorem typu Volterry (działa tylko na obcięciu z do zbioru tych punktów (τ,y), że $\tau \leq t$), zaś dziedzina H jest skończenie wymiarowa. Główne założenia twierdzeń o istnieniu dla takiego równania dotyczą operatora W, i są wyrażone za pomocą nierówności w pewnych normach; słabą stroną tych założeń jest to, że wspomniane nierówności są liniowe.

Nowy model zależności funkcyjnej został zaproponowany w [14, 17]:

$$\partial_t z(t,x) = F(t,x,z_{(t,x)},\partial_x z(t,x)),$$

gdzie $z_{(t,x)}$ jest argumentem funkcyjnym. Model ten jest bardzo dobrze znany w teorii równań różniczkowo funkcyjnych zwyczajnych (patrz, np. [11, 21, 22]). Jak wykazano w [16], omawiane wyżej sformułowanie

gRh

z operatorem W jest przypadkiem szczególnym tego modelu. Co więcej, dzięki operatorowi Hale'a można objąć wspólną teorią równania z odchylonym argumentem oraz różniczkowo całkowe. W szczególności dla równań z odchylonym argumentem postaci $z(\alpha_0(t),\alpha(t,x))$, modelowanym za pomocą operatora Hale'a, pojawiały się wcześniej wyniki o istnieniu, np. [8], nie dające jednak informacji o przypadku $z(\alpha_0(t,x),\alpha(t,x))$. Twierdzenie o istnieniu rozwiązań w sensie Carathéodory'ego równań z odchyleniem zależnym od funkcji niewiadomej, udowodnione w [20], dotyczy modelu

$$z_{(\alpha_0(t),\alpha(t,x,z_{(t,x)}))}.$$

W pracach [R2], [R4] postulujemy, aby składowa odpowiedzialna za opóźnienie, α_0, była zależna od tych samych argumentów, co składowa α. Taki postulat po raz pierwszy pojawił się w pracy [R1], gdzie wskazaliśmy istotną modyfikację metody quasilinearyzacji dla równań z argumentem funkcyjnym postaci

$$z_{(\alpha_0(t,x),\alpha(t,x))}.$$

Modyfikacja ta polega na powiększeniu układu równań quasiliniowych dla z, $u=(u_1,\dots,u_n)$ o nowe równanie dla niewiadomej u_0, będącej podstawieniem dla $\partial_t z$, i ingeruje w najbardziej skomplikowany technicznie fragment dowodu istnienia. Ów powiększony układ równań, jak następnie wykazaliśmy w [R5], można zdyskretyzować uzyskując zbieżny schemat różnicowy dla równań z powyższą zależnością.

Wprowadzenie operatora Hale'a rodzi pewną konsekwencję. Jeśli prawa strona równania ma postać

$$f(t,x,z_{(t,x)},\partial_x z(t,x)),$$

to $z_{(t,x)}$ powinno być dla każdego (t,x) funkcją o tej samej dziedzinie D, tak by można było ustalić dziedzinę funkcji f, np.: $E\times C(D,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$, i formułować sensownie założenia o f. Nie powoduje to kłopotów, jeśli rozważamy zagadnienie na pasie nieograniczonym $[0,c]\times\mathbb{R}^n$, ale dla zagadnień początkowo brzegowych każe nam zastanowić się, jak wygląda zależność funkcyjna w punktach (t,x) takich, że $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ jest małe.

Można tego kłopotu uniknąć na dwa sposoby. Pierwszy, to zadanie warunku brzegowego na zbiorze $\partial_0 E$ większym niż $(0,a)\times\partial\Omega$, a konkretnie takim, że $E_0\cup\partial_0 E=(E+D)\setminus E$, gdzie

$$E+D=\{(t+s,x+y):(t,x)\in E,(s,y)\in D\}.$$

Sposób ten, najbardziej dotąd powszechny w literaturze, wykorzystaliśmy w pracach [R1], [R2], [R6], [R5].

W pracach [R3], [R4] przyjęliśmy inne podejście do dziedziny operatora Hale'a, wprowadzone w [23]. W przybliżeniu, polega ono na takim zdefiniowaniu zbioru D, by dopuszczał wszystkie możliwe (tj. dla wszystkich (t,x)) odchylenia argumentów z, a następnie na założeniu niezależności $f(t,x,\cdot,q)$ od rozszerzenia z poza jego oryginalną dziedzinę.

3.2.1.2. Metoda bicharakterystyk Twierdzenia o istnieniu dla równań Hamiltona-Jacobiego z zależnością funkcyjną dowodzi się metodą kolejnych przybliżeń. Jest ona konstruowana dla układu całkowo funkcyjnego, który otrzymujemy poprzez quasilinearyzację równania (1), a następnie scałkowanie wzdłuż bicharakterystyk.

Metoda ta została wprowadzona przez matematyków włoskich, S. Cinquini i M. Cinquini-Cibrario, dla zagadnień hiperbolicznych bez zależności funkcyjnej, patrz [4], [5], [6]. Od ich nazwisk pochodzi określenie klasy rozwiązań uogólnionych, spełniających równanie dla każdego x prawie wszędzie względem t.

Pojęcie bicharakterystyk, czyli rozwiązań (przy ustalonych z, u) $g[z,u](\cdot,t,x)$ zagadnienia Cauchy'ego

$$\eta'(\tau)=-\partial_q f(\tau,\eta(\tau),V(z;\tau,\eta(\tau)),u(\tau,\eta(\tau))),\quad \eta(t)=x, \tag{3}$$

jest szczególnie ważne w naszej teorii.

Opiszemy teraz ów układ całkowo funkcyjny. W tym celu wprowadzamy oznaczenia: niech $\delta[z,u](t,x)\in[0,a)$ będzie lewym końcem maksymalnego przedziału istnienia $g[z,u](\cdot,t,x)$; dalej, niech

$$S[z,u](t,x)=\big(\delta[z,u](t,x),g[z,u](\delta[z,u](t,x),t,x)\big), \tag{4}$$

$$Q[z,u](\tau,t,x)=\big(\tau,g[z,u](\tau,t,x),V(z;\tau,g[z,u](\tau,t,x)),\partial_x z(\tau,g[z,u](\tau,t,x))\big). \tag{5}$$

Zakładamy ponadto, że V jest różniczkowalny po x, i że istnieje operator $W=W(z,u_0,u;t,x)$ o wartościach w $(C(D,\mathbb{R}))^n$, taki że

$$W_i(z,\partial_t z,\partial_x z;t,x)=\partial_{x_i}V(z;t,x),\quad i=1,\dots,n.$$

ЯК

Dla danych, dostatecznie regularnych funkcji z, u_0, u, definiujemy:

$$\begin{aligned} F[z,u](t,x) =&\varphi(S[z,u](t,x)) \\ &+\int_{\delta[z,u](t,x)}^{t} f(Q[z,u](\tau,t,x)) \\ &-\partial_q f(Q[z,u](\tau,t,x))(u(\tau,g[z,u](\tau,t,x)))^T d\tau, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} G[z,u_0,u](t,x) =&\varphi_x(S[z,u](t,x)) \\ &+\int_{\delta[z,u](t,x)}^{t} \partial_x f(Q[z,u](\tau,t,x)) \\ &+\partial_w f(Q[z,u](\tau,t,x))W(z,u_0,u;\tau,g[z,u](\tau,t,x))d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Rozważmy układ równań całkowo funkcyjnych

$$z=F[z,u], \quad u=G[z,u_0,u], \tag{8}$$

$$g[z,u](\tau,t,x)=x-\int_{\delta[z,u](t,x)}^{\tau} \partial_q f(Q[z,u](s,t,x))\,ds \tag{9}$$

gdzie

$$u_0(t,x)=f(t,x,V(z;t,x),u(t,x)), \tag{10}$$

z warunkiem początkowo brzegowym

$$z=\varphi, \quad u_0=\partial_t\varphi, \quad u=\varphi_x \quad \text{na} \quad E_0\cup\partial_0 E. \tag{11}$$

Przy tym $\varphi_x(t,x)=\partial_x\varphi(t,x)$ w punktach wewnętrznych zbioru $E_0\cup\partial_0 E$ i dla $(t,x)\in\{0\}\times\Omega$. W pozostałych punktach swej dziedziny, funkcja φ_x jest zdefiniowana za pomocą warunku zgodności (o którym piszemy dalej); liczba $\varphi_x(t,x)h$ jest równa pochodnej kierunkowej funkcji φ w kierunku wektora h w tych punktach (t,x), w których h jest styczny do $\partial\Omega$; w szczególności, jeśli Ω jest prostopadłościanem, to co najmniej $n-1$ składowych $\varphi_x(t,x)$ równych jest odpowiednim składowym $\partial_x\varphi(t,x)$, przy czym brakująca składowa wyznaczana jest jednoznacznie przez warunek zgodności.

Układ równań (9), (10) otrzymujemy w następujący sposób. Wprowadzamy najpierw dodatkową funkcję niewiadomą u, gdzie $u=\partial_x z$. Następnie dokonujemy linearyzacji równania (1) ze względu na u, to znaczy tworzymy równanie

$$\partial_t z(t,x)=f(U)+\partial_q f(U)(\partial_x z(t,x)-u(t,x))^T, \tag{12}$$

gdzie $U=(t,x,V(z;t,x),u(t,x))$. Różniczkując stronami równanie (1), otrzymujemy układ równań dla funkcji niewiadomej u:

$$\partial_t u(t,x)=\partial_x f(U)+\partial_q f(U)(\partial_x u(t,x))^T+\partial_w f(U)W(z,\partial_t z,\partial_x z;t,x). \tag{13}$$

Ostatecznie, podstawiamy $u_0=\partial_t z$ i $u=\partial_x z$ w (13). Układ (12), (13) ma następującą własność: równanie różniczkowe bicharakterystyk dla każdego z $n+1$ równań tego układu jest takie samo i ma postać (3). Jeśli napiszemy ów układ wzdłuż bicharakterystyki $g[z,u](\cdot,t,x)$, dostaniemy

$$\frac{d}{d\tau}z(\tau,g[z,u](\tau,t,x))=f(Q[z,u](\tau,t,x)-\partial_q f(Q[z,u](\tau,t,x)u(\tau,g[z,u](\tau,t,x))^T \tag{14}$$

oraz

$$\frac{d}{d\tau}u(\tau,g[z,u](\tau,t,x))=\partial_x f(Q[z,u](\tau,t,x)+\partial_w f(Q[z,u](\tau,t,x)W(z,u_0,u;\tau,g[z,u](\tau,t,x)). \tag{15}$$

Całkując na przedziale $[\delta[z,u](t,x),t]$ względem zmiennej τ, otrzymamy (8). Biorąc zaś równanie oryginalne, mamy wzór (10) na u_0.

Mówiąc obrazowo, wzdłuż bicharakterystyk propagują się dane początkowo brzegowe, z brzegu do wnętrza dziedziny rozwiązania. Ściślej, wartość rozwiązania z w punkcie (t,x) zależy m. in. od wartości $\varphi(S[z,u](t,x))$, gdzie $S[z,u](t,x)\in(E_0\cup\partial_0 E)\cap\overline{E}$ jest punktem, do którego został przedłużony (w lewo) wykres bicharakterystyki dla z,u o punkcie końcowym (t,x). Dlatego też, przy warunku początkowo brzegowym zadanym na całym zbiorze $E_0\cup\partial_0 E$, dobre postawienie problemu wymaga, by wykres każdej bicharakterystyki miał dokładnie jeden punkt wspólny z $E_0\cup\partial_0 E$. W punktach $\partial\Omega$, gdzie istnieje wektor normalny ν, warunkiem dostatecznym dobrego postawienia problemu jest niezerowanie się iloczynu skalarnego $\nu\cdot\partial_q f$. W praktyce postulujemy istotne oddzielenie od zera wartości tego iloczynu, bowiem jest to konieczne w naszym dowodzie lipschitzowskiej ciągłości funkcji $(t,x)\mapsto\delta[z](t,x)$, która jest pierwszą składową $S[z,u](t,x)$. Dla zbioru

Ω postaci $\Omega = \Pi_{i=1}^{n}(-b_i, b_i)$, warunek z wektorem normalnym przekłada się na założenia o znaku $\partial_{q_i} f$ w tych punktach $x \in \partial\Omega$, że $|x_i| = b_i$. W numerycznej metodzie charakterystyk, powyższe staje się warunkiem koniecznym na to, by węzły siatki należały do dziedziny rozwiązania.

Układ równań quasiliniowych pierwszego rzędu (12), (13), będący stadium pośrednim pomiędzy zagadnieniem (1), (2) a układem całkowo funkcyjnym (8), można też wykorzystać do konstrukcji metody różnicowej, patrz [R5]. Rozwiązania schematów uwikłanych znajduje się wówczas rozwiązując układ równań algebraicznych liniowych. Alternatywą jest np. konstrukcja schematu uwikłanego bezpośrednio dla równania (1) i rozwiązywanie powstałego układu równań nieliniowych na każdej warstwie $\{t = t^{(r)}\}$, patrz praca [D3]. Wreszcie, możemy zdyskretyzować wspomniany układ całkowo funkcyjny, otrzymując tzw. numeryczną metodę charakterystyk, której zbieżność nie zależy od proporcji pomiędzy składowymi kroku siatki, a więc, będąc zarazem metodą jawną, ma tę samą zaletę, co schematy różnicowe uwikłane.

3.2.2 Istnienie rozwiązań

3.2.2.1 Wyniki pracy [R1]. Opis zagadnienia. Dla dowolnie ustalonego zbioru indeksów $\mathscr{S}$, zdefiniujmy

$$X = \{p = \{p_s\}_{s\in\mathscr{S}} : p_s \in \mathbb{R}, s \in \mathscr{S} \text{ oraz } \|p\| = \sup\{|p_s| : s \in \mathscr{S}\} < \infty\}.$$

Niech funkcje

$$f : \overline{E} \times C(D,X) \times \mathbb{R}^n \to X, \qquad \varphi : E_0 \cup \partial_0 E \to X,$$
$$\alpha_0 = \{\alpha_{0.s}\}_{s\in\mathscr{S}} : E \to X, \quad \alpha = \{\alpha_s\}_{s\in\mathscr{S}} : E \to X.$$

będą dane, przy czym

$$\begin{aligned} E &= [0,a] \times \overline{\Omega}, \quad \Omega = \Pi_{i=1}^{n}(-b_i,b_i), \quad b_i > 0,\, i = 1,\ldots,n, \\ D &= [-d_0,0] \times \Pi_{i=1}^{n}[-d_i,d_i], \quad d_i \geq 0,\, i = 1,\ldots,n, \\ E_0 &= [-d_0,0] \times \Pi_{i=1}^{n}[-b_i - d_i, b_i + d_i], \\ \partial_0 E &= (0,a] \times \left(\Pi_{i=1}^{n}[-b_i - d_i, b_i + d_i] \setminus \Omega\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Weźmy nieskończony układ równań typu (1):

$$\partial_t z_s(t,x) = f_s(t,x,V(z;t,x),\partial_x z_s(t,x)), \qquad s \in \mathscr{S}, \tag{17}$$

na $E = (0,a) \times \Omega$, przy czym

$$\Omega = (-b,b), \qquad V(z;t,x) = \{(z_s)_{\alpha_{0,s}(t,x),\alpha_s(t,x)}\}_{s\in\mathscr{S}} \tag{18}$$

gdzie $b = (b_1,\ldots,b_n)$, a $(-b,b)$ rozumiemy jako $\Pi_{i=1}^{n}(-b_i,b_i)$ (podobnie dalej oznaczamy zbiory będące iloczynami kartezjańskimi przedziałów rzeczywistych). Do (17) dołączamy warunek początkowo brzegowy

$$z_s(t,x) = \varphi_s(t,x), \qquad s \in \mathscr{S}, \tag{19}$$

na zbiorze $E_0 \cup \partial_0 E$. Stawiamy pytanie o istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnienia (17), (19), w zbiorze funkcji o składowych klasy $C^{1.L}$.

Wprowadzenie $z_{(\alpha_0(t,x),\alpha(t,x))}$ zamiast $z(\alpha_0(t,x),\alpha(t,x))$ przy zachowaniu metody dowodu istnienia, tj. metody quasilinearyzacji, wymusza podwyższenie regularności względem t. W rezultacie nie ma sensu już rozważać rozwiązań uogólnionych (w sensie Cinquini-Cibrario), dostajemy rozwiązania klasyczne, to znaczy $C^{1.L}$.

Opis uzyskanych wyników. Streścimy teraz wyniki pracy [R1] dotyczące problemu (17), (19), jednakże dla przejrzystości prezentacji ograniczymy się do przypadku jednego równania, tj. jednoelementowego zbioru $\mathscr{S}$.

Przypuśćmy, że funkcja f jest ciągła (a względem t, lipschitzowska) i ograniczona na $\Xi = E \times C(D,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ i spełnia na Ξ następujące warunki. Pochodne: $\partial_x f$, $\partial_q f$ oraz pochodna Fréchet'a $\partial_w f$ istnieją, są ciągłe i ograniczone ($\partial_w f$ w $(C(D,\mathbb{R}))'$ z normą indukowaną przez normę supremum); spełniają też jednostajny warunek Lipschitza względem x, q i w.

Ponieważ nie zajmujemy się równaniami z wyprzedzonym argumentem, zakładamy, że $\alpha_0(t,x) \leq t$. Zakładana dla α_0, α regularność to to lipschitzowska ciągłość oraz istnienie pochodnej względem x, lipschitzowskiej względem tej zmiennej.

MC.

Jak wspomnieliśmy wyżej, do dobrego postawienia problemu wymagane jest założenie gwarantujące, że bicharakterystyki „wchodzą” do wnętrza dziedziny rozwiązania: dla pewnego $\kappa > 0$,

$$\operatorname{sign}(x_k)\partial_{q_k} f(t,x,w,q) \geq 2\kappa \quad \text{na} \quad [0,a] \times \Delta^{(k)} \times C(D,X) \times \mathbb{R}^n, \tag{20}$$

gdzie $\Delta^{(k)} = \{(t,x) \in E : |x_k| = b_k\}$. Zakładamy ponadto, że istnieje rozszerzenie φ, funkcja $\psi : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^{1.L}$, spełniająca warunek zgodności: dla każdego z będącego rozszerzeniem φ,

$$\partial_t \psi(t,x) = f(t,x,V(z;t,x),\partial_x \psi(t,x)) \quad \text{na} \quad E \cap (E_0 \cup \partial_0 E), \qquad s \in \mathscr{S}. \tag{21}$$

Pochodne cząstkowe funkcji ψ służą następnie do określenia warunków początkowo brzegowych w definicji (umieszczonej dwa akapity niżej) ciągu kolejnych przybliżeń $(z^{(m)}, u_0^{(m)}, u^{(m)})$.

Pierwszym krokiem dowodu istnienia jest wykazanie regularności bicharakterystyk oraz funkcji $\delta[z,u]$: spełniania warunku Lipschitza względem (t,x) i całkowej odmiany tego warunku względem z, u. Przy tym dla bicharakterystyk wystarczy użyć nierówności Gronwalla, natomiast dla funkcji δ wykorzystujemy warunek (20).

Ustalmy parametr $c \in (0,a)$ i połóżmy $z^{(0)} = \psi$, $u_0^{(0)} = \partial_t \psi$, $u^{(0)} = \partial_x \psi$ na zbiorze E_c^*. Dla danych $z^{(m)}$, $u_0^{(m)}$, $u^{(m)}$, niech $u^{(m+1)}$ będzie rozwiązaniem zagadnienia

$$u = G^{(m)}[u], \tag{22}$$

przy czym definicja operatora $G^{(m)}$ przypomina wzór (7): na E_c kładziemy

$$\begin{aligned} G^{(m)}[u](t,x) &= \partial_x \psi(S[z,u](t,x)) \\ &+ \int_{\delta[z,u](t,x)}^{t} \Big[\partial_x f(Q[z^{(m)},u](\tau,t,x)) \\ &\qquad + \partial_w f(Q[z^{(m)},u](\tau,t,x)) W(z^{(m)},u_0^{(m)},u^{(m)};\tau, g[z^{(m)},u](\tau,t,x)) \Big] d\tau, \end{aligned}$$

zaś na $E_0 \cup \partial_0 E_c$ niech $G^{(m)}[u](t,x) = \partial_x \psi(t,x)$. Następnie, niech

$$\begin{aligned} z^{(m+1)}(t,x) &= F[z^{(m)},u^{(m+1)}](t,x) \quad \text{na} \quad E_c, \\ u_0^{(m+1)}(t,x) &= f(t,x,V(z^{(m)};t,x),\partial_x u^{(m+1)}(t,x)) \quad \text{na} \quad E_c, \\ z^{(m+1)}(t,x) &= \varphi(t,x) \quad \text{na} \quad E_0 \cup \partial_0 E_c, \\ u_0^{(m+1)}(t,x) &= \partial_t \psi(t,x) \quad \text{na} \quad E_0 \cup \partial_0 E_c. \end{aligned}$$

Zbieżność tak zdefiniowanego ciągu kolejnych przybliżeń dowodzimy w następujących krokach.

Niech $C^L_{(c)}$ będzie przestrzenią funkcji lipschitzowsko ciągłych na E_c^*, o wartościach w $\mathbb{R}^n$, z normą zdefiniowaną jako suma normy supremum i najlepszej stałej Lipschitza.

Lemat 1. Przy powyższych założeniach o funkcjach danych f, φ, α_0, α, i przy dostatecznie małym parametrze c występującym w definicji zbiorów E_c, $\partial_0 E_c$, oraz przy pewnych stałych Lipschitza dla funkcji $z^{(m)}$, $u_0^{(m)}$, $u^{(m)}$ i pewnych stałych ograniczających $|u_0^{(m)}|$, $\|u^{(m)}\|$, istnieje zbiór Y ograniczony w $C^L_{(c)}$, niezależny od m, taki że

$$G^{(m)}(Y) \subset Y. \tag{23}$$

Jest to jedyny krok dowodu, w którym istotna jest lokalność wyniku względem t (małość parametru c).

Ponieważ zbiór $C^L_{(c)}$ jest domknięty w $C(E_c^*)$ z normą supremum,możemy użyć normy jej równoważnej, zwanej normą Bieleckiego:

$$\|u\|_\lambda = \max\{\|u(t,x)\| e^{-\lambda t} : (t,x) \in E_c^*\},$$

i uzyskać, bez dodatkowego założenia o parametrze c, następujący wynik.

Lemat 2. Przy założeniach Lematu 1, istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania punktu stałego 22 w zbiorze Y.

Najtrudniejszym technicznie etapem dowodu jest wykazanie związku pomiędzy $z^{(m)}$ a $u_0^{(m)}$, $u^{(m)}$.

Lemat 3. Przy założeniach Lematu 1,

$$\partial_t z^{(m)} = u_0^{(m)}, \qquad \partial_x z^{(m)} = u^{(m)}, \tag{24}$$

dla $m \geq 0$.

𝒦𝒢.

Dowód przebiega przez indukcję, dla $m = 0$ własność (24) zachodzi z definicji, natomiast krokiem indukcyjnym jest wykazanie, że

$$|z^{(m+1)}(\bar{t},\bar{x}) - z^{(m+1)}(t,x) - u_0^{(m+1)}(t,x)(\bar{t}-t) - u^{(m)}(t,x)(\bar{x}-x)^T| = o(|\bar{t}-t| + \|\bar{x}-x\|)$$

przy $(\bar{t},\bar{x}) \to (t,x)$, o ile (24) zachodzi dla m. Używa się przy tym definicji ciągu kolejnych przybliżeń, a następnie zamiany zmiennych w niektórych całkach; niezbędny jest też warunek zgodności (21).

Korzystając ponownie z normy Bieleckiego oraz z pewnego twierdzenia o stabilności dla liniowych równań różnicowych, dowodzimy następnie jednostajnej zbieżności ciągu kolejnych przybliżeń.

Główny wynik jest następujący.

Twierdzenie 1. Przy założeniach Lematu 1, istnieje rozwiązanie v, klasy $C^{1.L}$, zagadnienia (17), (19). Ponadto zachodzi lipschitzowska ciągłość rozwiązań względem danych (φ) w przestrzeni C^1.

W pracy [R1], powyższe twierdzenie zawiera też informację o zbiorze ograniczonym w przestrzeni $C^{1.L}$, do którego należy rozwiązanie.

3.2.2.2 Wyniki pracy [R2]. Opis zagadnienia. Rozważmy układ równań na E:

$$\partial_t z_i(t,x) = \sum_{j+1}^{n} \rho_{ij}(t,x,V(z;t,x))\partial_{x_j} z_i(t,x) = G_i(t,x,V(z;t,x)), \quad 1 \le i \le m, \tag{25}$$

z warunkiem początkowo brzegowym (2) na $E_0 \cup \partial_0 E$, przy czym E, E_0, $\partial_0 E$ oraz D są określone jak w (16).

Szukamy rozwiązań powyższego problemu, lokalnych względem t, w klasie $C^{1.L}$. Założenia o operatorze V mają obejmować w szczególności przypadek odchylenia zależnego od funkcji niewiadomej,

$$V(z;t,x) = z_{(\alpha_0(t,x,z(t,x)),\, \alpha(t,x,z(t,x)))}. \tag{26}$$

Opis uzyskanych wyników. Artykuł [R2] jest pierwszą pracą w bogatej tematyce równań różniczkowo funkcyjnych pierwszego rzędu, która zawiera model z ogólnym nieliniowym operatorem V o wartościach funkcyjnych.

Jak wcześniej, dla przejrzystości prezentacji ograniczymy się do jednego równania (tj. $m = 1$). O funkcjach danych G, ρ_j, $j = 1,\dots,n$, zakładamy to samo, co o f w pracy [R1] (oczywiście pomijając zmienną q), z tym, że jedynie na iloczynie kartezjańskim zbioru E i zbioru $C^{1.L}$. Ponadto na ρ_j nie musimy zakładać warunku Lipschitza względem t.

Oznaczmy przez $C(\overline{U})$ zbiór funkcji ograniczonych i jednostajnie ciągłych na U; przez $C^1(\overline{U})$ będziemy rozumieć zbiór tych funkcji z $C(\overline{U})$, które są mają na U ograniczoną i jednostajnie ciągła pochodną. Pochodną funkcji z, określonej na podzbiorze $\mathbb{R}^{1+n}$, w punkcie (t,x), będziemy oznaczać przez $Dz(t,x)$ (tj. $Dz = (\partial_t z, \partial_x z)$). Jeśli nie zaznaczymy inaczej, przez normy funkcji ciągłych będziemy rozumieć normy supremum; wprowadzamy też oznaczenie $\mathrm{Lip}[z]$ dla najlepszej globalnej stałej Lipschitza dla z.

Oznaczmy przez $C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2] \subset C^{1.L}$ zbiór tych rozszerzeń z funkcji $\varphi|_{E_0\cup\partial_0 E_c}$ na zbiór E_c^*, które spełniają

$$\|Dz\| \le d_1, \mathrm{Lip}[Dz] \le d_2.$$

Przyjmujemy następujące założenia o V: dla dowolnych $d_1, d_2 \ge 0$ istnieją L, $\bar{d}_1, \bar{d}_2 \ge 0$ o własnościach:

1) jeśli $z \in C^1(\overline{E^*})$ i $\|Dz\| \le d_1$, to dla $(t,x) \in E$

$$\|\partial_x V(z;t,x)\| \le \bar{d}_1,$$

2) jeśli $z \in C^1(\overline{E^*})$ i $\|Dz\| \le d_1$, $\mathrm{Lip}[Dz] \le d_2$, to dla (t,x), $(t,\bar{x}) \in E$

$$\|\partial_x V(z;t,\bar{x}) - \partial_x V(z;t,x)\| \le \bar{d}_2 \|\bar{x}-x\|,$$

3) jeśli z, $\bar{z} \in C^1(\overline{E^*})$ i $\|Dz\|$, $\|D\bar{z}\| \le d_1$, to dla $(t,x) \in E$

$$\|V(\bar{z};t,x) - V(z;t,x)\| \le L \left\| (\bar{z}-z)|_{E_t} \right\|.$$

Nierówności z powyższymi stałymi pojawiają się w założeniu $H[c,d,V]$ ([R2], str. 566), wraz z parametrem c, dotyczącym lokalności rozwiązania względem t. W uwadze 4.1 ([R2], str. 571) wyjaśniamy, w jaki sposób je rozwiązać, otrzymując oszacowania z góry stałych d_1, d_2 dla rozwiązania $z \in C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2]$ problemu (25), (2), i jednocześnie oszacowanie z dołu parametru c. W pracy [R2] na str. 571-572 rozważamy przypadek (26) odchylenia zależnego od funkcji niewiadomej i znajdujemy jawne wzory na $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ w zależności od d_1, d_2.

Dowód istnienia przeprowadzamy, stosując twierdzenie Banacha do równania punktu stałego

$$z(t,x) = F[z](t,x) \quad \text{na} \quad E^*_c, \tag{27}$$

gdzie

$$F[z](t,x) = \varphi(S[z](t,x)) + \int_{\delta[z](t,x)}^{t} G(\tau, g[z](\tau,t,x), V(z;\tau, g[z](\tau,t,x)))d\tau \quad \text{na} \quad E_c$$
$$F[z](t,x) = \varphi(t,x) \quad \text{na} \quad E_0 \cup \partial_0 E_c,$$

przy czym $\partial_0 E_c = \{(\tau,x) \in \partial_0 E : \tau \le c\}$. Przy tej metodzie, w porównaniu do metody kolejnych przybliżeń, uzyskanie rozwiązań klasycznych wymaga wykazania wyższej regularności bicharakterystyk i funkcji $\delta[z]$; dokładniej mówiąc, dowodzimy lipschitzowskiej różniczkowalności $g[z](\tau,\cdot)$ oraz różniczkowalności $\delta[z](\cdot)$ na przeciwobrazie dodatniej półprostej. Powyższą własność funkcji δ wynika z różniczkowalności $g[z](\tau,\cdot)$ i twierdzenia o funkcji uwikłanej. Rozumowanie (dowód Lematu 2.2 w [R2]), prowadzące następnie do ciągłości $\delta[z]$ na E, różni się od innych dowodów analogicznej własności, występujących w literaturze.

Niech $\mathscr{I} = \{0 \le i \le n : d_i > 0\}$. Zakładamy następujący warunek zgodności. Dla dowolnych z, $\bar{z} \in C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2]$, zachodzi równość:

$$G(t,x,V(z;t,x)) = G(t,x,V(\bar{z};t,x)), \quad \rho_j(t,x,V(z;t,x)) = \rho_j(t,x,V(\bar{z};t,x))$$

dla $(t,x) \in \partial_0 E_c \cap E$, $j = 1,\dots,n$. Ponieważ i tak zakładamy niepustość zbioru $C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2]$, więc można wykonać następujący manewr bez konieczności powiększania stałych d_1, d_2: bierzemy element zbioru $C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2]$ i rozszerzamy go na $\mathbb{R}^{1+n}$; wartości pochodnych cząstkowych funkcji φ, w punktach leżących na brzegu zbioru E_c, definiujemy następnie jako wartości analogicznych pochodnych tego rozszerzenia. Dodatkowo wymagamy, by

$$\partial_t \varphi(t,x) + \sum_{j=1}^{n} \rho_j(t,x,V(z;t,x))\partial_{x_j}\varphi(t,x) = G(t,x,V(z;t,x)) \tag{28}$$

dla $(t,x) \in \partial_0 E_c \cap E_c$ i $z \in C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2]$. Powyższy zabieg z pochodną φ oraz warunek zgodności (28) są istotne w naszym dowodzie następującego wyniku, niezbędnego w metodzie punktu stałego.

Lemat 4. Przy powyższych założeniach o funkcjach danych i przy dostatecznie małym parametrze c występującym w definicji zbiorów E_c, $\partial_0 E_c$, oraz przy pewnych wartościach d_1, d_2, operator F przekształca zbiór $C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2]$ w siebie.

Udowodniwszy wcześniej lipschitzowską ciągłość $g[z]$ i $\delta[z]$ względem z, wykazujemy własność zwężania dla operatora F przy pomocy normy Bieleckiego. Korzystając, jak zwykle, z własności grupowej bicharakterystyk, dowodzimy równoważności zagadnienia oryginalnego i równania punktu stałego (27) (w [R1] było to zagadnienie całkowo funkcyjne (8)). Ciągłą zależność rozwiązań względem danych początkowo brzegowych uzyskujemy łatwo na mocy nierówności Gronwalla. Daje to główny wynik pracy [R2]:

Twierdzenie 2. Przy założeniach lematu 4, istnieje rozwiązanie $v \in C^{1.L}_{\varphi.c}[d_1,d_2]$ zagadnienia (25), (2). Ponadto zachodzi lipschitzowska ciągłość rozwiązań względem danych (φ) w przestrzeni funkcji ciągłych z normą supremum.

3.2.2.3 Wyniki pracy [R3]. Opis zagadnienia. Załóżmy teraz, że dziedzina rozwiązania jest zbiorem cylindrycznym $[0,a] \times \overline{\Omega}$, lecz zamiast iloczynem kartezjańskim przedziałów (jak dotychczas), niech Ω będzie obszarem o regularnym brzegu, niekoniecznie ograniczonym. Jest oczywiste, że przy tym założeniu dotychczasowe metody dowodu poprawności postawienia problemu (1) i regularności charakterystyk oraz funkcji δ muszą zostać silnie zmodyfikowane. Wymagamy dodatkowo, by warunek początkowo brzegowy zadany był tylko na brzegu zbioru E; zmieni się więc warunek zgodności. Stawiamy pytanie, czy istnienie i ciągła zależność rozwiązań dla problemu na takiej dziedzinie da się udowodnić metodą charakterystyk.

Aby pokazać, że taki wynik jest możliwy, weźmy następujące, dość proste zagadnienie. Szukamy funkcji z absolutnie ciągłej, spełniającej

$$\partial_t z(t,x) + \sum_{j=1}^{n} f_j(t,x)\partial_{x_j} z(t,x) = F(t,x,z_{\alpha_0(t),\alpha(t,x)}) \tag{29}$$

prawie wszędzie na E, oraz (2) na $E_0 \cup \partial_0 E$.

Opiszemy teraz procedurę wprowadzoną w [23]. Przypuśćmy, że wartość $F : E \times C(D,\mathbb{R})$ w punkcie (t,x,w) zależy jedynie od obcięcia funkcji w do zbioru

$$\mathscr{D}[t,x] = \{(\tau,y) \in \mathbb{R}^{1+n} : \tau \leq 0, (t+\tau, x+y) \in E^*\}.$$

Nazwijmy tę własność funkcji F warunkiem (V). Definiując następnie D jako sumę zbiorów $\mathscr{D}[t,x]$ po $(t,x) \in E$, możemy przyjąć, że

$$z_{(t,x)}(\tau,y) = \tilde{z}(t+\tau, x+y), \quad (\tau,y) \in D,$$

dla pewnego (dzięki warunkowi (V), dowolnego) jednostajnie ciągłego rozszerzenia $\tilde{z}$ funkcji z na $\mathbb{R}^{1+n}$.

Opis uzyskanych wyników. Główna wartość pracy [R3] polega na przełamaniu stereotypu założeń o dziedzinie E. Najciekawsze są więc w niej twierdzenia o charakterystykach. Ponieważ rozważamy rozwiązania lipschitzowskie względem x, spodziewamy się, że $\partial\Omega$ jest kawałkami wykresem funkcji lipschitzowskiej. W [R3] formułujemy następujące założenia o $\partial\Omega$, oparte na uogólnieniu tego warunku na zbiory nieograniczone opisanym w [1].

Mówimy, że Ω spełnia uogólniony warunek stożka, jeżeli istnieje lokalnie skończone pokrycie $\{U_j\}$ brzegu Ω oraz odpowiadający mu ciąg $\{C_j\}$ stożków skończonych

$$C_j = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \quad \text{lub} \quad 0 < \|x\| \leq \rho_j, \angle(x,v_j) \leq \gamma_j/2\}$$

(gdzie $\|\cdot\|$ jest 2-normą w $\mathbb{R}^n$, $\rho_j > 0$ jest wysokością stożka, $v_j \in \mathbb{R}^n$ jest niezerowym wektorem kierunkowym, kąt rozwarcia $\gamma_j \in (0,\pi]$, zaś $\angle(\cdot,\cdot)$ jest kątem pomiędzy niezerowymi wektorami w $\mathbb{R}^n$"), przy czym istnieje pewien stożek skończony C, taki że każdy C_j jest przystający do C, i zachodzą następujące własności.

(i) Istnieje $M < \infty$ takie, że średnica każdego ze zbiorów U_j nie przekracza M,

(ii) dla pewnego $\varepsilon > 0$, zbiór $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon\}$ jest zawarty w $\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$,

(iii) dla każdego j, suma stożków $Q_j \equiv \bigcup_{x\in\Omega\cap U_j}(x + C_j)$ jest zawarta w Ω,

(iv) dla pewnej liczby naturalnej R, każda rodzina $R+1$ zbiorów Q_j ma puste wnętrze.

W naszej pracy zakładamy powyższy zestaw warunków, łącznie z następującymi.

(v) Dla każdej pary punktów $x,y \in \Omega_\varepsilon$ takiej że $\|x-y\| < \varepsilon$, istnieje j

$$x,y \in V_j(\varepsilon) = \{x \in U_j : \operatorname{dist}(x,\partial U_j) > \varepsilon\}.$$

(vi) Istnieje rodzina $\mathscr{C}$ stożków skończonych przystających do ustalonego stożka C^*, taka że dla każdego skończonego ciągu J indeksów,

$$\text{jeśli} \quad \Omega \cap \bigcap_{j\in J} U_j \neq \emptyset \quad \text{to istnieje} \quad C \in \mathscr{C}, \quad \text{taki że} \quad C \subset \bigcap_{j\in J} C_j.$$

(vii) Zbiór Ω jest lipschitzowsko łukowo spójny, to znaczy istnieje stała L_Ω o tej własności, że dla dowolnych x, $y \in \Omega$, istnieje funkcja $g : [0,1] \to \Omega$, taka że $g(0) = x$, $g(1) = y$, oraz $\|g(s) - g(t)\| \leq L_\Omega |s-t| \|x-y\|$ dla s, $t \in [0,1]$.

Równanie charakterystyk dla zagadnienia prawie liniowego (29) ma postać

$$\eta'(\tau) = f(\tau,\eta(\tau)), \qquad \eta(t) = x. \tag{30}$$

Załóżmy, że funkcja f spełnia warunki Carathéodory'ego na E, jest istotnie ograniczona i spełnia uogólniony warunek Lipschitza względem x, ze współczynnikiem całkowalnym: na $[0,a]$. Regularność funkcji δ wymaga teraz istnienia $\kappa > 0$ takiego, że dla prawie wszystkich $t \in [0,a]$ i dla każdego j, $\|f(t,x)\| \geq \kappa$ dla wszystkich $x \in \Omega \cap U_j$. Dla poprawności postawienia problemu zakładamy ponadto, że istnieje rodzina stożków skończonych $\{C'_j\}_{j=1}^{\infty}$ przystających do ustalonego stożka C' i mających ten sam wektor kierunkowy i wysokość co C_j, ale mniejszy kąt rozwarcia, taka że dla prawie wszystkich $t \in [0,a]$ i dla każdego j,

$$f(t,x) \in \bigcup_{\lambda>0} \lambda C'_j, \quad \text{dla} \quad x \in \Omega \cap U_j.$$

Dowody lematów o charakterystykach wykorzystują powyższą własność oraz fakt, iż wartość całki Lebesgue'a funkcji o wartościach w pewnym stożku nieskończonym $C = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \angle(x,v) \leq \gamma/2\}$ należy również do tego stożka. Przypomnimy, że dla dobrego postawienia problemu (29), (2) potrzeba, by charakterystyki miały dokładnie jeden punkt wspólny z $E_0 \cup \partial_0 E$, a więc niedozwolona jest sytuacja: $g(\tilde{a},t,x) \in \partial\Omega$, $\tilde{a} > \delta(t,x)$, gdzie $g(\cdot,t,x)$ jest rozwiązaniem (30), a $\delta(t,x)$ lewym końcem przedziału jej istnienia. Regularność charakterystyk wykazujemy, jak zwykle, w oparciu o nierówność Gronwalla. Dowód analogicznej własności funkcji δ jest trudniejszy; korzystamy w nim z następującej obserwacji geometrycznej (widocznej już na płaszczyźnie, czyli dla $n = 2$): dla dwu stożków nieskończonych, $\bar{C} \supset \bar{C}'$, o tym samym wektorze kierunkowym, ale różnych kątach rozwarcia, zbiór $x + C' \setminus C$ (dla ustalonego $x \in \mathbb{R}^n$) mieści się w kuli o promieniu $K\|x\|$ dla pewnego K zależnego tylko od różnicy kątów rozwarcia. Pozwala to oszacować kłopotliwy składnik w nierówności

$$\kappa(\delta(t,x) - \delta(s,y) \leq \|g(\delta(t,x),s,y) - g(\delta(t,x),t,x)\| + \|g(\delta(t,x),t,x) - g(\delta(s,y),s,y)\|,$$

i uzyskać lokalną lipschitzowską ciągłość

$$\kappa(\delta(t,x) - \delta(s,y) \leq (1+K)\|g(\delta(t,x),s,y) - g(\delta(t,x),t,x)\|,$$

z której globalna wynika dzięki lipschitzowskiej łukowej spójności Ω.

Wykazawszy oszacowania *a priori* rozwiązania równania punktu stałego, otrzymanego przez scałkowanie (29) wzdłuż charakterystyk, podajemy zbiór Y ograniczony w przestrzeni funkcji ograniczonych i lipschitzowsko ciągłych na E; dowodzimy istnienia rozwiązań w Y, i ich ciągłą zależność od funkcji początkowo brzegowych. Jak można się spodziewać po zagadnieniu prawie liniowym, uzyskujemy wynik (istnienie) globalny względem t. Seminorma, związana z warunkiem Lipschitza względem x, jest zdefiniowana w stylu normy Bieleckiego. Jednocześnie, przyjęte o funkcjach danych założenia pozwalają na wykazanie absolutnej ciągłości rozwiązań względem t jedynie przy funkcji α_0 niezależnej od x.

3.2.2.3 Wyniki pracy [R4]. Opis zagadnienia. Rozważmy teraz zagadnienie nieliniowe (1), (2) na zbiorze $E = [0,a] \times \overline{\Omega}$, gdzie $\partial\Omega$ jest regularny, zaś $\partial_0 E$ zawiera się w brzegu E. Operator V nie musi być liniowy. Stawiamy pytanie o istnienie rozwiązań klasy $C^{1.L}$; spodziewamy się, że regularność brzegu Ω musi być tego samego typu. Czerpiemy z [1] następujący zespół warunków dla zbioru $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (niekoniecznie ograniczonego) klasy C^1.

Istnieje lokalnie skończone pokrycie $\{U_j\}$ zbioru $\partial\Omega$, i odpowiadający mu ciąg funkcji $\{\Phi_j\}$, taki że dla każdego j, Φ_j ma składniki klasy $C^1(\overline{U_j})$, przekształca U_j na kulę jednostkową $B = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < 1\}$ ($\|\cdot\|$ jest 2-normą), i jego odwrotność Ψ_j ma składniki klasy $C^1(\overline{B})$. Ponadto:

(i) dla pewnego $\varepsilon > 0$, Ω_ε zawiera się w $\bigcup_{j=1}^{\infty} \Psi_j(y \in \mathbb{R}^n : \|y\| < 1/2)$,

(ii) dla każdego j, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$,

(iii) istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego j:

$$\|\partial_x \Phi_j(x)\| \leq M, \quad x \in U_j, \qquad \|\partial_x \Psi_j(y)\| \leq M, \quad y \in B,$$

Do tego dokładamy następujące dwa warunki; pierwszy z nich podwyższa regularność brzegu, drugi dotyczy spójności Ω.

(iv) Istnieje $L_\phi > 0$ takie, że dla każdego j, x, $\bar{x} \in U_j$, $1 \leq i \leq n-1$, mamy $\|\partial_x \phi_{ji}(x) - \partial_x \phi_{ji}(\bar{x})\| \leq L_\phi \|x - \bar{x}\|$, gdzie $\Phi_j(x) = (\phi_{j1}, \ldots, \phi_{jn})$.

(v) Zbiór Ω jest lipschitzowsko łukowo spójny (p. założenie (vii) z pracy [R3]).

Opis uzyskanych wyników. Mając do dyspozycji wyżej opisane mapy Φ_j, wyrażamy założenia o regularności φ na $\partial_0 E$ poprzez własności złożenia $\varphi(t, \Psi_j(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0))$; formułujemy też założenie o „wchodzeniu" bicharakterystyk do Ω, następująco: istnieje κ dodatnia, dla której

$$-\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} \phi_{jn}(x) \partial_{q_k} f(t,x,w,q) \geq \kappa \tag{31}$$

zachodzi przy $t \in [0,a]$, $x \in \Omega \cap U_j$, $w \in C(D,\mathbb{R})$, $q \in \mathbb{R}^n$. Jak w [R3], dowodzimy następnie dobrego postawienia problemu (1), (2), patrz lemat 3.3 w [R4]. Własność Lipschitza dla funkcji $\delta[z,u]$ dowodzimy teraz podobnie, jak w innych pracach o zagadnieniach początkowo brzegowych, tyle że zamiast uporządkowania bicharakterystyk (blisko brzegu) w którymś z kierunków osiowych, jak było dla dziedzin „prostopadłościennych", mamy obecnie uporządkowanie w kierunku normalnym do brzegu (patrz lemat 3.5). Do wspomnianego dowodu potrzebna jest nam jeszcze jedna własność bicharakterystyk.

Lemat 5. **(Lemma 3.4, [R4])** Istnieje $\tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon$, takie, że dla dowolnych: $x \in \Omega_{\tilde{\varepsilon}}$, $t \in [0,a]$, oraz z, u - przedłużeń φ, φ_x, odpowiednio, klasy $C^{1.L}$ zachodzi

$$g[z,u](\tau,t,x) \in U_j \qquad \text{dla} \quad \tau \in [\delta[z,u](t,x),t],$$

o ile $\|\Phi_j(x)\| < 1/2$ (na mocy założenia (i) o Ω, takie j istnieje).

Innymi słowy, bicharakterystyki, których wykres przebiega w pewnym punkcie dostatecznie blisko brzegu Ω, możemy przedłużać w lewo z tego punktu bez ryzyka, że opuścimy bliskie otoczenie $\partial\Omega$.

Interesująco przedstawia się obecnie warunek zgodności. Jeśli $d_0 = 0$ i zbiór $E_0 \cup \partial_0 E$ zawiera się w brzegu zbioru E, to wystarczy, by φ spełniało równanie różniczkowe (1) na zbiorze $\{0\} \times \partial\Omega$; w przeciwnym wypadku należy jeszcze wymagać spełniania równania na $\{0\} \times \Omega$. To, że „brakującą" (w definicji funkcji φ_x i w definicji operatorów całkowo funkcyjnych) pochodną kierunkową φ w kierunku normalnym do brzegu Ω w punktach $(t,x) \in (0,a] \times \partial\Omega$, można wyznaczyć (i jest ona ciągła i ograniczona) z równania (1), wynika z założenia (31) i z twierdzenia o funkcji uwikłanej. Zamiast więc warunku zgodności na zbiorze $(0,a] \times \partial\Omega$, zakładamy tam, iż

$$\partial_t\varphi(t,x) = f(t,x,V(z;t,x),\varphi_x),$$

jak zwykle wymagając dodatkowo, by powyższa wartość f była niezależna od tego, jak z przedłuża φ.

Metodą ciągu kolejnych przybliżeń uzyskujemy twierdzenie o istnieniu i ciągłej zależności rozwiązań od danych początkowo brzegowych, analogiczne do twierdzenia 1.

W ostatniej sekcji pracy [R4] mieszczą się komentarze na temat przypadku szczególnego, czyli odchyleń zależnych od funkcji niewiadomej. Opisujemy szczegółowo metodę otrzymywania przedłużeń z (opierając się na pewnych twierdzeniach o przedłużaniu funkcji klasy $C^{1.L}$ z książki [27]) potrzebnych w definicji operatora Hale'a. W rachunkach sprawdzających założenia o V dla wspomnianego szczególnego przypadku tego operatora, pojawia się wówczas norma operatora przedłużenia.

Teorię równań różniczkowo funkcyjnych cząstkowych na zbiorach cylindrycznych uważamy za dość ciekawą. Można oczekiwać wyników dotyczących aproksymacji rozwiązań takich zagadnień; według naszej najlepszej wiedzy, nie pojawiły się jeszcze takie wyniki dla równań rzędu pierwszego. Ze względu na trudność konstruowania schematów różnicowych w bliskości brzegu Ω, być może należy użyć numerycznej metody bicharakterystyk. Należy zwrócić uwagę, że nasz wynik [R4] nie jest uogólnieniem prac wcześniejszych w tym sensie, że prezentowane twierdzenie nie stosuje się do zbiorów będących kartezjańskimi iloczynami przedziałów; można próbować zastosować metodę charakterystyk w przypadku, gdy $\partial\Omega$ jest jedynie kawałkami gładki.

Wyniki otrzymane w [R4] są nowe również dla zagadnienia (1), (2) bez zależności funkcyjnej (tj. dla $V(z;t,x) = z(t,x)$).

3.2.3 Aproksymacja rozwiązań

3.2.3.1 Wyniki pracy [R5]. Opis zagadnienia. Rozważmy zagadnienie (1) z operatorem Hale'a: $V(z;t,x) = z_{(t,x)}$, na dziedzinie E, z warunkiem początkowo brzegowym (2) na $E_0 \cup \partial_0 E$, przy czym zbiory E, E_0, $\partial_0 E$ są dane wzorami (16). Konstruujemy stabilną metodę różnicową dla tego problemu.

Na zbiorze E^* definiujemy siatkę. Niech $h = (h_0, h')$, $h' = (h_1, \ldots, h_n)$, będą krokami siatki. Dla danego h oraz $(r,m) \in \mathbb{Z}^{1+n}$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$, węzłami siatki niech będą punkty $(t^{(r)}, x^{(m)})$, gdzie

$$t^{(r)} = rh_0, \qquad x^{(m)} = (x_1^{(m_1)}, \ldots, x_n^{(m_n)}) = (m_1h_1, \ldots, m_nh_n).$$

Oznaczmy przez H zbiór kroków h takich, że istnieją liczby naturalne $N_0, N_1, \ldots, N_n$ spełniające: $N_0h_0 = d_0$,

$$N_jh_j = \begin{cases} d_j, & \text{jeśli} \quad d_j > 0, \\ b_j, & \text{jeśli} \quad d_j = 0. \end{cases} \qquad \text{dla} \quad 1 \le j \le n.$$

Istnieją $K = (K_1, \ldots, K_n) \in \mathbb{N}^n$ oraz $K_0 \in \mathbb{N}$, takie że

$$(K_1h_1, \ldots, K_nh_n) \le b < ((K_1+1)h_1, \ldots, (K_n+1)h_n)$$

i $K_0h_0 \le a < (K_0+1)h_0$. Dla $h \in H$ piszemy $\|h\| = h_0 + h_1 + \ldots + h_n$. Niech

$$\mathbb{R}_h^{n+1} = \left\{ (t^{(r)}, x^{(m)}) : (r,m) \in \mathbb{Z}^{1+n} \right\}, \quad I_h = \left\{ t^{(r)} : -N_0 \le r \le K_0 \right\}$$

oraz

$$E_{0.h} = E_0 \cap \mathbb{R}_h^{n+1}, \quad E_h = E \cap \mathbb{R}_h^{n+1}, \quad \partial_0 E_h = \partial_0 E \cap \mathbb{R}_h^{n+1},$$

$$E_h^* = E_{0.h} \cup E_h \cup \partial_0 E_h, \qquad D_h = D \cap \mathbb{R}_h^{n+1}.$$

Oznaczmy

$$E_{r.h}^* = E_h^* \cap \left([-d_0, t^{(r)}] \times \mathbb{R}^n \right), \quad -N_0 \le r \le K_0,$$

i

$$E_h' = \left\{ (t^{(r)}, x^{(m)}) \in E_h \setminus \partial_0 E_h : 0 \le r \le K_0 - 1 \right\}.$$

Dla funkcji $\omega : I_h \to \mathbb{R}$, $z : E_h^* \to \mathbb{R}$, $u : E_h^* \to \mathbb{R}^n$ będziemy używać zapisu skróconego:

$$\omega^{(r)} = \omega(t^{(r)}), \quad z^{(r,m)} = z(t^{(r)}, x^{(m)}), \quad u^{(r,m)} = u(t^{(r)}, x^{(m)}).$$

Potrzebujemy dyskretnej wersji operatora $(t,x) \to z_{(t,x)}$. Dla funkcji $z : E_h^* \to \mathbb{R}$ punktu $(t^{(r)}, x^{(m)}) \in E_h$ definiujemy funkcję $z_{[r,m]} : D_h \to \mathbb{R}$ wzorem $z_{[r,m]}(\tau, y) = z(t^{(r)} + \tau, x^{(m)} + y)$, $(\tau, y) \in D_h$.

Niech $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, z jedynką na j-tym miejscu, $1 \le j \le n$.

Klasyczne metody dla zagadnienia (1), (2) polegają na zamianie pochodnych cząstkowych na ilorazy różnicowe. Ponadto, ponieważ równanie (1) zawiera argument funkcyjny, który jest elementem przestrzeni $C(D,\mathbb{R})$, potrzebujemy operatora interpolacyjnego $T_h : \mathbf{F}(D_h,\mathbb{R}) \to C(D,\mathbb{R})$, gdzie $\mathbf{F}(D_h,\mathbb{R})$ jest zbiorem funkcji rzeczywistych określonych na D_h. Operator taki został wprowadzony w książce [17]. Prowadzi to do równania różnicowo funkcyjnego

$$\delta_0 z^{(r,m)} = f(t^{(r)}, x^{(m)}, T_h z_{[r,m]}, \delta z^{(r,m)}) \tag{32}$$

z warunkiem początkowo brzegowym

$$z^{(r,m)} = \varphi_h^{(r,m)} \quad \text{na} \quad E_{0.h} \cup \partial_0 E_h, \tag{33}$$

gdzie φ_h jest funkcją daną, zaś $\delta z = (\delta_1 z, \ldots, \delta_n z)$. Następujące przykłady równania (32) są znane w literaturze. Metoda różnicowa Eulera otrzymywana jest przy wyborze ilorazów różnicowych:

$$\delta_0 z^{(r,m)} = \frac{1}{h_0} \left[z^{(r+1,m)} - z^{(r,m)} \right] \tag{34}$$

oraz

$$\delta_j z^{(r,m)} = \begin{cases} \frac{1}{h_j} \left[z^{(r,m+e_j)} - z^{(r,m)} \right], & 1 \le j \le k, \\ \frac{1}{h_j} \left[z^{(r,m)} - z^{(r,m-e_j)} \right], & k+1 \le j \le n, \end{cases} \tag{35}$$

gdzie $0 \le k \le n$ jest ustalone. Następnym ważnym przykładem jest schemat Laxa. Otrzymuje się go, definiując:

$$\delta_0 z^{(r,m)} = \frac{1}{h_0} [z^{(r+1,m)} - \Delta[z]^{(r,m)}] \tag{36}$$

gdzie

$$\Delta[z]^{(r,m)} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n} [z^{(r,m+e_j)} + z^{(r,m-e_j)}] \tag{37}$$

oraz

$$\delta_j z^{(r,m)} = \frac{1}{h_j} [z^{(r,m+e_j)} - z^{(r,m-e_j)}], \quad 1 \le j \le n. \tag{38}$$

Załóżmy, że f jest ciągła na $\Xi = E \times C(D,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, i że istnieje na tym zbiorze pochodna $\partial_q f$. Wtedy stabilność równań różnicowych, generowanych przez (1) jest ściśle związana z tzw. warunkiem Couranta-Friedrichsa-Lewego (CFL). (patrz [9], rozdział 3). Warunki CFL dla nieliniowego równania (1) i dla metody różnicowej Eulera mają postać:

(i) dla każdego $P = (t, x, w, q) \in \Xi$ mamy

$$1 - h_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{h_j} |\partial_{q_j} f(P)| \ge 0, \tag{39}$$

(ii) funkcja

$$\operatorname{sign} \partial_q f = (\operatorname{sign} \partial_{q_1} f \ldots \operatorname{sign} \partial_{q_n} f) \tag{40}$$

jest stała na Ξ.

Warunki CFL dla (1) i dla schematu Laxa mają postać:

$$\frac{1}{n}-\frac{h_0}{h_j}|\partial_{q_j}f(P)|\geq 0,\; 1\leq j\leq n \tag{41}$$

gdzie $P\in\Xi$. Załóżmy, że $\partial_{q_j}f$, $1\leq j\leq n$, są ograniczone na Ξ. Warunki (39) i (41) nakładają ograniczenia na kroki siatki w twierdzeniach o zbieżności dla (32), (33). Założenia o regularności, wymagane dla zbieżności metody Eulera i metody Laxa są takie same. Zakłada się warunek Lipschitza dla f względem zmiennej funkcyjnej lub nieliniowe oszacowania typu Perrona.

Pokazujemy, że istnieją metody różnicowe dla (1), (2), dla których warunek CFL można opuścić.

Opis uzyskanych wyników. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na Ξ, wraz ze swymi pochodnymi: $\partial_x f$, $\partial_q f$ i pochodną Fréchet'a $\partial_w f$, i że te pochodne są ograniczone. Konstruujemy metodę różnicową dla (1), (2), dyskretyzując układ równań (12), (13). Niech

$$P^{(r,m)}[z,u]=\left(t^{(r)},x^{(m)},T_h z_{[r,m]},u^{(r,m)}\right).$$

Dla $u:E_h^*\to\mathbb{R}^n$ oraz $(t^{(r)},x^{(m)})\in E_h$ piszemy

$$u_{[r,m]}=((u_1)_{[r,m]},\ldots,(u_n)_{[r,m]})\quad\text{and}\quad T_h u_{[r,m]}=(T_h(u_1)_{[r,m]},\ldots,T_h(u_n)_{[r,m]})$$

oraz

$$\partial_w f(P^{(r,m)}[z,u])T_h u_{[r,m]}=\left(\partial_w f(P^{(r,m)}[z,u])T_h(u_1)_{[r,m]},\ldots,\partial_w f(P^{(r,m)}[z,u])T_h(u_n)_{[r,m]}\right).$$

Rozważamy quasiliniowy układ równań różnicowych uwikłanych z niewiadomymi z, u:

$$\delta_0 z=f(P^{(r,m)}[z,u])+\partial_q f(P^{(r,m)}[z,u])\circ(\delta z^{(r+1,m)}-u^{(r,m)}), \tag{42}$$

$$\delta_0 u^{(r,m)}=\partial_x f(P^{(r,m)}[z,u])+\partial_w f(P^{(r,m)}[z,u])\,T_h u_{[r,m]}+\partial_q f(P^{(r,m)}[z,u])\star\left[\delta u^{(r+1,m)}\right]^T, \tag{43}$$

z warunkami początkowo brzegowymi

$$z^{(r,m)}=\varphi_h,\; \mathrm{u}^{(\mathrm{r,m})}=\psi_\mathrm{h}\quad\text{on}\quad \mathrm{E}_{0.\mathrm{h}}\cup\partial_0\mathrm{E}_\mathrm{h}, \tag{44}$$

gdzie

$$\varphi_h:E_{0.h}\cup\partial_0E_h\to\mathbb{R},\; \psi_h:E_{0.h}\cup\partial_0E_h\to\mathbb{R}^n,\; \psi_h=(\psi_{h.1},\ldots,\psi_{h.n}),$$

są funkcjami danymi. Operator różnicowy δ_0 jest dany wzorem

$$\delta_0 z^{(r,m)}=\frac{1}{h_0}\left(z^{(r+1,m)}-z^{(r,m)}\right), \tag{45}$$

$$\delta_0 u^{(r,m)}=\frac{1}{h_0}\left(u^{(r+1,m)}-u^{(r,m)}\right).$$

Operator różnicowy δ dla zmiennej przestrzennej x definiujemy następująco. Przypuśćmy, że $(t^{(r+1)},x^{(m)})\in E_h\setminus\partial_0E_h$, i że (z,u) jest znane na zbiorze $E^*_{r.h}$. Jeśli

$$\partial_{q_j}f(P^{(r,m)}[z,u])\geq 0 \tag{46}$$

to

$$\delta_j z^{(r+1,m)}=\frac{1}{h_j}\left(z^{(r+1,m+e_j)}-z^{(r+1,m)}\right), \tag{47}$$

oraz

$$\delta_j u^{(r+1,m)}=\frac{1}{h_j}\left(u^{(r+1,m+e_j)}-u^{(r+1,m)}\right). \tag{48}$$

W przeciwnym wypadku

$$\delta_j z^{(r+1,m)}=\frac{1}{h_j}\left(z^{(r+1,m)}-z^{(r+1,m-e_j)}\right), \tag{49}$$

oraz

$$\delta_j u^{(r+1,m)}=\frac{1}{h_j}\left(u^{(r+1,m)}-u^{(r+1,m-e_j)}\right). \tag{50}$$

Bierzemy $j = 1, \ldots, n$ w (46)-(50). Zauważmy, że wybór ilorazu różnicowego zależy od (r,m) i (z,u), musi więc być dokonywany w trakcie obliczeń. W ogólnym przypadku, wyboru dokonujemy oddzielnie w każdym węźle siatki.

Jeśli weźmiemy r zamiast $r+1$ w (42), (43) oraz w (47),(48),(49),(50), otrzymamy jawny schemat różnicowy dla (1), (2) (patrz [7]), dla którego wymagane są warunki CFL. Istnienie rozwiązania schematu jawnego można łatwo udowodnić przez indukcję, natomiast dla schematu uwikłanego dowód jest trudniejszy i wykorzystuje następującą różnicową zasadę maksimum.

Niech

$$J_+^{(r,m)}[z,u] = \left\{ j : 1 \le j \le n,\ \partial_{q_j} f(P^{(r,m)}[z,u]) \ge 0 \right\}$$

oraz

$$J_-^{(r,m)}[z,u] = \{1, \ldots, n\} \setminus J^+[r,m].$$

Oznaczmy też

$$C_h = \left\{ m : -b < x^{(m)} < b \right\}.$$

Lemat 6. Przypuśćmy, że $0 \le r \le K_0 - 1$ jest ustalone, funkcje $(z,u) : E^*_{r.h} \to \mathbb{R}^{n+1}$ są znane, a $z_h : E^*_{r+1.h} \to \mathbb{R}$ oraz liczby $\delta_j z_h^{(r+1,m)}$ są zdefiniowane przez (47), (49).

(I) Jeśli nierówność różnicowa

$$z_h^{(r+1,m)} \le h_0 \partial_q f(P^{(r,m)}[z,u]) \circ \delta z_h^{(r+1,m)}, \quad m \in C_h, \tag{51}$$

zachodzi oraz $\mu \in \mathbb{Z}^n$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, jest takie, że

$$z_h^{(r+1,\mu)} = M \tag{52}$$

gdzie

$$M = \max\{ z_h^{(r+1,m)} : -K \le m \le K \} \quad \text{oraz} \quad M > 0 \tag{53}$$

to $(t^{(r+1)}, x^{(\mu)}) \in \partial_0 E_h$.

(II) Jeśli nierówność różnicowa

$$z_h^{(r+1,m)} \ge h_0 \partial_q f(P^{(r,m)}[z,u]) \circ \delta z_h^{(r+1,m)}, \quad m \in C_h, \tag{54}$$

zachodzi oraz $\mu \in \mathbb{Z}^n$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, jest takie, że $z_h^{(r+1,\mu)} = \widetilde{M}$ gdzie

$$\widetilde{M} = \min\{ z_h^{(r+1,m)} : -K \le m \le K \} \quad \text{oraz} \quad \widetilde{M} < 0 \tag{55}$$

to $(t^{(r+1)}, x^{(\mu)}) \in \partial_0 E_h$.

□

Zbieżności schematu dowodzimy przy użyciu następującego twierdzenia o nierównościach różnicowo funkcyjnych. Niech

$$I = [-d_0, 0], \qquad J = [0, a].$$

Dla $\eta : I \cup J \to \mathbb{R}$, $t \in J$ definiujemy $\eta_{(t)} : I \to \mathbb{R}$ wzorem $\eta_{(t)}(\tau) = \eta(t+\tau)$, $\tau \in I$.

Niech

$$I_h = \left\{ t^{(r)} : -N_0 \le r \le 0 \right\}, \qquad J_h = \left\{ t^{(r)} : 0 \le r \le K_0 \right\}.$$

Przy $\omega : I_h \cup J_h \to \mathbb{R}$, piszemy skrótowo $\omega^{(r)} = \omega(t^{(r)})$, $t^{(r)} \in I_h \cup J_h$. Dla $\omega : I_h \cup J_h \to \mathbb{R}$ i $t^{(r)} \in J_h$ definiujemy $\omega_{[r]} : I_h \to \mathbb{R}$ przez

$$\omega_{[r]}(\tau) = \omega(t^{(r)} + \tau), \qquad \tau \in I_h.$$

Niech $T_{h_0} : \mathbf{F}(I_h, \mathbb{R}) \to C(I, \mathbb{R})$ będzie zdefiniowane następująco:

$$T_{h_0}[\omega](t) = \frac{t - t^{(r)}}{h_0} \omega^{(r+1)} + \left(1 - \frac{t - t^{(r)}}{h_0} \right) \omega^{(r)} \quad \text{for} \quad t^{(r)} \le t \le t^{(r+1)}.$$

Twierdzenie 3. Przypuśćmy, że

1) $\tilde{\sigma} : J \times C(I,\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą względem obu zmiennych, i że dla każdego $t \in J$

$$\tilde{\sigma}(t,\tilde{w}) = 0 \quad \text{for} \quad \tilde{w} \equiv 0,$$

2) maksymalnym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$\eta'(t) = \tilde{\sigma}(t,\eta_{(t)}), \quad t \in J,$$

$$\eta = 0 \quad \text{na} \quad I$$

jest $\bar{\eta}(t) = 0$, $t \in I \cup J$,

3) $\omega_h : I_h \cup J_h \to \mathbb{R}_+$ spełnia nierówność rekurencyjną

$$\omega_h^{(r+1)} \leq \omega_h^{(r)} + h_0\tilde{\sigma}(t^{(r)}, T_{h_0}[(\omega_h)_{[r]}] + (\alpha_0(h))_{(t)}) + h_0\alpha_1(h) \tag{56}$$

dla $0 \leq r \leq K_0 - 1$, zachodzi

$$\omega_h^{(r)} \leq \alpha_2(h) \quad \text{dla} \quad t^{(r)} \in I_h \tag{57}$$

oraz

$$\lim_{h\to 0} \alpha_0(h) = \lim_{h\to 0} \alpha_1(h) = \lim_{h\to 0} \alpha_2(h) = 0.$$

Wówczas istnieją: $\varepsilon > 0$ i $\alpha : H \to \mathbb{R}_+$ takie, że przy $\|h\| < \varepsilon$

$$\omega_h^{(r)} \leq \alpha(h) \quad \text{dla} \quad t^{(r)} \in J_h \qquad \text{and} \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. \quad \square \tag{58}$$

Niech $V : C(D,\mathbb{R}) \to C(I,\mathbb{R}_+)$ będzie operatorem interpolacyjnym, zdefiniowanym wzorem

$$V[w](t) = \max\{|w(t,x)| : x \in [-d,d]\}. \tag{59}$$

Zauważmy, że $V[w]$ jest funkcją ciągłą.

Założmy, że funkcja $\sigma : J \times \mathbb{R}_+ \times C(I,\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ jest ciągła i niemalejącą względem wszystkich zmiennych oraz:

1) dla każdego $t \in J$, $\sigma(t,0,\omega) = 0$ dla $\omega \equiv 0$,

2) dla każdego $c \in \mathbb{R}_+$ i $d \geq 1$, maksymalnym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$\eta'(t) = c\eta(t) + d\sigma(t,\eta(t),\eta_{(t)}), \quad t \in J \tag{60}$$

$$\eta = 0 \quad \text{na} \quad I \tag{61}$$

jest $\bar{\eta}(t) = 0$, $t \in I \cup J$.

O przyrostach pochodnych f względem zmiennej funkcyjnej zakładamy, co następuje:

$$\|\partial_x f(t,x,w,q) - \partial_x f(t,x,\bar{w},\bar{q})\|,$$

$$\|\partial_w f(t,x,w,q) - \partial_w f(t,x,\bar{w},\bar{q})\|, \qquad \|\partial_q f(t,x,w,q) - \partial_q f(t,x,\bar{w},\bar{q})\|$$

są ograniczone z góry przez $\sigma(t,\|q-\bar{q}\|, V[w-\bar{w}])$. Poniżej zamieszczamy główny wynik pracy [R5].

Twierdzenie 4. Przy powyższych założeniach, i jeśli:

1) funkcja $\varphi : E_0 \cup \partial_0 E \to \mathbb{R}$ jest klasy C^2, zaś $v : E^* \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (1), (2) i v jest klasy C^2 na E^*,

2) funkcje (z_h, u_h), gdzie $z_h : E_h^* \to \mathbb{R}$, $u : E_h^* \to \mathbb{R}^n$, $u_h = (u_{h.1}, \ldots, u_{h.n})$ spełniają (42)-(44) z δ_0, δ danymi przez (45)-(50) i istnieją funkcje ζ_0, $\zeta_1 : H \to \mathbb{R}_+$, takie, że

$$|\varphi^{(r,m)} - \varphi_h| \leq \zeta_0(\mathrm{h}), \quad \|\partial_x \varphi^{(r,m)} - \psi_h\| \leq \zeta_1(\mathrm{h}) \quad \text{on} \quad E_{0.h} \cup \partial_0 E_h \tag{62}$$

oraz $\lim_{h\to 0} \zeta_0(h) = 0$, $\lim_{h\to 0} \zeta_1(h) = 0$.

Wtedy istnieje liczba ε oraz funkcja $\alpha : H \to \mathbb{R}_+$, takie że dla $\|h\| \leq \varepsilon$

$$|v_h^{(r,m)} - z_h| + \|\partial_x v^{(r,m)} - u_h\| \leq \alpha(\mathrm{h}) \quad \text{na} \quad E_h \tag{63}$$

i $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, przy czym v_h jest obcięciem v do zbioru E_h^*. $\square$

K.

Podajemy również w [R5] oszacowanie błędu rozwiązania przybliżonego w normie supremum.

Zauważmy, że dzięki temu, że funkcja σ ma argument funkcyjny, obejmowana przez metodę klasa równań jest większa; podajemy w [R5] przykłady funkcji Perrona z argumentem funkcyjnym (Lemma 4.4, Lemma 4.5).

3.2.3.2 Wyniki pracy [R6]. Opis zagadnienia. Rozważmy zagadnienie (1) z operatorem Hale'a i funkcją odchylającą:

$$V(z;t,x) = z_{(\alpha_0(t,x),\alpha(t,x))},$$

na dziedzinie E, z warunkiem początkowo brzegowym (2) na $E_0 \cup \partial_0 E$, przy czym zbiory E, E_0, $\partial_0 E$ są dane wzorami (16). Konstruujemy stabilną metodę różnicową dla tego problemu, bez użycia warunków CFL, zwaną numeryczną metodą bicharakterystyk. O regularności funkcji f zakładamy to samo, co w pracy [R5], natomiast warunek Perrona formułujemy przy użyciu funkcji σ nie mającej argumentu funkcyjnego. Zakładamy też, że funkcja α jest lipschitzowsko ciągła, wraz ze swą pochodną $\partial_x\alpha$.

Opis uzyskanych wyników. Rozważana metoda wymaga definiowania siatek nieregularnych, tj. innego typu niż opisana w pracy [R5]. Oznaczmy przez H zbiór kroków h takich, że istnieją liczby naturalne $N_0, N_1, \ldots, N_n$ spełniające: $N_0 h_0 = d_0$, $N_j h_j = b_j$, dla $j = 1, \ldots, n$. Zbiory $E_{0.h}$, $\partial_0 E_h$ definiujemy następnie tak samo, jak wyżej, ale dla $x \in (-b,b)$ (w sensie nierówności między odpowiednimi współrzędnymi), siatka konstruowana jest dynamicznie.

Załóżmy, że

$$\varphi_h : E_{0.h} \cup \partial_0 E_h \to \mathbb{R}^{n+2}, \quad \varphi_h = (\varphi_{h.0}, \varphi_{h.1}, \ldots, \varphi_{h.n}, \varphi_{h.n+1}),$$

są dane. Niech $S_h = (E_{0.h} \cup \partial_0 E_h) \cap E$ oznacza zbiór węzłów brzegowych. Ustalmy $(t^{(s)}, x^{(m)} \in S_h$, $s < K_0$. Oznaczmy przez $P[z,u](t,x)$ punkt $(t,x,V(z;t,x),u(t,x)) \in \Xi$. Definiujemy wtedy:

$$\eta^{(s)} = x^{(m)} \quad \text{oraz} \quad (z,u,u_0) = \varphi_h \quad \text{na} \quad E_{0.h} \cup \partial_0 E_h, \tag{64}$$

a następnie

$$\eta^{(r+1)} = \eta^{(r)} - h_0 \partial_q f(P[T_h z,u](t^{(r)},\eta^{(r)})), \tag{65}$$

$$\begin{aligned} z(t^{(r+1)},\eta^{(r+1)}) = z(t^{(r)},\eta^{(r)}) + h_0 f(P[T_h z,u](t^{(r)},\eta^{(r)})) \\ - h_0 \partial_q f(P[T_h z,u](t^{(r)},\eta^{(r)}))[u(t^{(r)},\eta^{(r)})]^T, \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} u(t^{(r+1)},\eta^{(r+1)}) &= u(t^{(r)},\eta^{(r)}) + h_0 \partial_x f(P[T_h z,u](t^{(r)},\eta^{(r)})) \\ &+ h_0 \partial_w f(P[T_h z,u](t^{(r)},\eta^{(r)})) \\ &\times \Big[(T_h u)_{\alpha_0(t^{(r)},\eta^{(r)}),\alpha(t^{(r)},\eta^{(r)})} \star \partial_x \alpha'(t^{(r)},\eta^{(r)}) + (T_h u_0)_{\alpha_0(t^{(r)},\eta^{(r)}),\alpha(t^{(r)},\eta^{(r)})} \partial_x \alpha_0(t^{(r)},\eta^{(r)})\Big] \end{aligned} \tag{67}$$

dla $s \le r \le K-1$, gdzie $T_h u$ oznacza działanie operatorem T_h na każdą składową u, zaś u_0 jest zdefiniowane jako $f(P[T_h z,u](\cdot))$. Punktami siatki są rozwiązania (65) dla wszystkich $s \in S_h$. Jak już powiedzieliśmy, powyższy układ powstał przez dyskretyzację (9), (14), (15). Założenie o dobrym postawieniu problemu ma tutaj postać następującą: istnieją $\delta > 0$, $\kappa > 0$ taka, że dla $(t,x,w,q) \in \Xi$,

$$\begin{aligned} \partial_{q_j} f(t,x,w,q) > \kappa \quad &\text{jeśli} \quad x_j > b_j - \delta \\ \partial_{q_j} f(t,x,w,q) < -\kappa \quad &\text{jeśli} \quad x_j < -b_j + \delta. \end{aligned}$$

Przy powyższych założeniach, otrzymujemy główny wynik pracy [R6]:

Twierdzenie 5. Jeśli:

1) funkcja $\varphi : E_0 \cup \partial_0 E \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1, zaś $v : \Omega \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem (1), (2) i v jest klasy C^2 na Ω oraz $u = \partial_x v$, $u_0 = \partial_t v$

2) $h \in H$, przy czym h_0 jest na tyle małe, że

$$h_0 \|\partial_q f(P)\| \le \delta,$$

to metoda (64)-(67) jest zbieżna. □

JR.

Twierdzenie to dowodzimy metodą nierówności różnicowych.

Istotnym wkładem pracy [R6] w teorię aproksymacji rozwiązań równań Hamiltona-Jacobiego z zależnością funkcyjną jest propozycja operatora interpolacyjnego T_h, który jest złożeniem operatora używanego na siatkach regularnych z operatorem uśredniającym najbliższe wartości w najbliższych węzłach. W sekcji 4 tej pracy opisujemy szczegółowo jego konstrukcję oraz dowodzimy własności aproksymacyjnych w przestrzeniach funkcji ciągłych.

W [R6] podajemy również oszacowanie błędu dla przypadku lipschitzowskiego.

4. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

D1 W. Czernous, Numerical method of characteristics for semilinear partial functional differential systems. *Journal of Numerical Mathematics* **16** (2008), no. 1, 1–21, doi: 10.1515/JNUM.2008.001.

D2 P. Arłukowicz, W. Czernous, Numerical method of bicharacteristics for quasilinear partial functional differential equations. *Computational Methods in Applied Mathematics* **8** (2008), no. 1, 21–38, *http://czernous.mat.ug.edu.pl/PAWC2008.pdf.*

D3 W. Czernous, Z. Kamont, Implicit difference methods for Hamilton Jacobi functional differential equations. *Numerical Analysis and Applications* **2** (2009), no. 1, 46–57, doi:10.1134/S1995423909010054.

D4 W. Czernous, Pseudospectral method for semilinear partial functional differential equations. *Opuscula Mathematica* **30** (2010), no. 2, 133–145, *http://www.opuscula.agh.edu.pl/vol30/2/art/opuscula_math_3009.pdf.*

D5 W. Czernous, Generalized Euler method for quasilinear hyperbolic IBVPs with state dependent delays. *Functional Differential Equations* **17** (2010), no. 1-2, 79–103, *http://czernous.mat.ug.edu.pl/WC2010FDE.pdf.*

D6 W. Czernous, Difference methods for infinite systems of parabolic functional differential equations. *International Journal of Qualitative Theory of Differential Equations and Applications* **4** (2010), no. 1, 53–76, *http://czernous.mat.ug.edu.pl/WC2010IJQTDEA.pdf.*

D7 W. Czernous, Global solutions of semilinear first order partial functional differential equations with mixed conditions. *Functional Differential Equations* **18** (2011), no. 1-2, 135–154, *http://czernous.mat.ug.edu.pl/WC2011FDE.pdf.*

D8 W. Czernous, Z. Kamont, Comparison of explicit and implicit difference methods for quasilinear functional differential equations. *Applicationes Mathematicae* **38** (2011), no. 3, 315–340, doi: 10.4064/am38-3-4.

D9 W. Czernous, Z. Kamont, Comparison between some explicit and implicit difference schemes for Hamilton Jacobi functional differential equations. *Applied Mathematics and Computation* **38** (2011), no. 3, 315–340, doi: 10.1016/j.amc.2012.02.034.

D10 W. Czernous, Z. Kamont, Numerical methods for Hamilton Jacobi functional differential equations. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematichsekoi Fiziki* **52** (2012), no. 3, 1–21, jak również wersja u Springera: *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **52** (2012), no. 3, 330–350, doi: 10.1134/S0965542512030050,

D11 W. Czernous, Classical solutions of hyperbolic differential systems with state dependent delays. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **42** (2012), no. 1, 71–89, doi: 10.1216/RMJ-2012-42-1-71, *http://projecteuclid.org/euclid.rmjm/1327329312.*

Druga nasza praca o globalnym istnieniu rozwiązań równań prawie liniowych, [D7], zawiera wyniki dotyczące istnienia rozwiązań i ich różniczkowalności w sensie Gâteaux względem danych początkowo brzegowych (funkcji φ) oraz względem pary: funkcja φ i prawa strona równania. Istnienie rozwiązań dowodzone jest metodą kolejnych przybliżeń.

Artykuł [D11] dotyczy układu (25) z warunkiem początkowym, tzw. uogólnionym warunkiem Cauchy'ego: warunek początkowy dla każdej niewiadomej składowej zadany jest na innym zbiorze.

W pracach [D1], [D2] wykazaliśmy zbieżność metody numerycznej charakterystyk dla zagadnień początkowo brzegowych, odpowiednio: prawie liniowych i quasiliniowych. Dla równań prawie liniowych równania charakterystyk można rozwiązać najpierw, konstruując siatkę dla wszystkich $t^{(r)}$, potem zaś szukać aproksymacji z rozwiązania zagadnienia oryginalnego. Dla równań quasiliniowych już tak nie jest, bowiem charakterystyki zależą od z.

Praca [D4] dotyczy metody aproksymacji nie związanej z metodą różnic skończonych. Była inspirowana sukcesem metod pseudospektralnych dla równań prawie liniowych, gdzie w pewnych przestrzeniach funkcyjnych uzyskuje się zbieżność eksponencjalną względem liczby węzłów na osi x. Jednakże wynik, jaki udało nam się uzyskać, stosuje się tylko do równań z opóźnieniem, tj. dla modelu $V(z;t,x) = z_{(\alpha_0(t),x)}$.

W artykule [D4] rozważaliśmy metodę uwikłaną dla (1), (2) z operatorem Hale'a. Zakładana jest tam stałość znaku pochodnych cząstkowych $\partial_{q_j} f$. Schemat różnicowy konstruujemy przez dyskretyzację (1); równanie dla rozwiązania schematu różnicowego jest nieliniowe, znajdujemy je przy pomocy metody Newtona. Funkcja porównawcza typu Perrona zawiera argument funkcyjny, podobnie jak w [D5], gdzie rozważamy uogólniony (brak założeń o znaku pochodnej $\partial_{q_j} f$, ilorazy różnicowe wybierane w trakcie obliczeń) schemat Eulera. W [D5] dowodzimy też oszacowań *a priori* dla rozwiązań zagadnienia różniczkowego, dzięki czemu możemy sformułować lokalne założenia o regularności w twierdzeniu o zbieżności schematu.

W [D6] dowodzimy zbieżności skończonych schematów różnicowych dla nieskończonych układów równań parabolicznych. W tej pracy wskazujemy nietrywialne przykłady nieskończonych układów funkcji porównawczych.

Praca [D8] dotyczy zagadnień quasiliniowych pierwszego rzędu oraz parabolicznych, z warunkami Dirichleta. Porównywane są twierdzenia o zbieżności schematów jawnych i uwikłanych, wskazujemy też fakt, iż oszacowania błędu dla obu tych typów są takie same. Artykuły [D9], [D10] również mają charakter przeglądowy: porównujemy tam schematy jawne (Laxa, Eulera) i uwikłane (Eulera) dla równań Hamiltona-Jacobiego. Również w tych pracach otrzymane wyniki pokazują identyczność założeń o regularności funkcji danych, wymaganej do zbieżności schematów, a także podobne oszacowania błędu.

Literatura

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics 140, Academic Press, Amsterdam, 2003

[2] Bassanini P., Turo J., Generalized solutions to free boundary problems for hyperbolic systems of functional partial differential equations. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)* **156** (1990), 211–230.

[3] Brandi P., Ceppitelli R., Existence, uniqueness and continuous dependence for a hereditary nonlinear functional partial differential equation of the first order. *Ann. Polon. Math.* **47** (1986), no. 2, 121–136.

[4] S. Cinquini *On hyperbolic systems of (nonlinear) partial differential equations in several independent variables*, (Italian) Ann. Mat. Pura Appl. 120 (1979), 201–214.

[5] M. Cinquini Cibrario *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni quasi lineari a derivate parziali in piú variabili indipendenti*, (Italian) Ann. Mat. Pura Appl. 75 (1967), 1–46.

[6] M. Cinquini Cibrario *A class of systems of partial differential equations in many independent variables*, (Italian. English summary) Rend. Mat. 2 (1982), no. 3, 499–522.

[7] Czernous W., Generalized Euler method for first order partial differential functional equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* **39** (2006), 49–68..

[8] Człapiński T., On the mixed problem for hyperbolic partial differential-functional equations of the first order. *Czechoslovak Math. J.* **49** (1999), no. 4, 791–809.

[9] Godlewski E., Raviart P. A., Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws. Applied Mathematical Sciences, 118. *Springer-Verlag, New York*, 1996.

[10] Gołaszewska A., Turo J., Carathéodory solutions to quasi-linear hyperbolic systems of partial differential equations with state dependent delays. *Funct. Differ. Equ.* **14** (2007), no. 2-4, 257–278.

[11] Hale J. K., Verduyn L., Sjoerd M., Introduction to functional-differential equations. Applied Mathematical Sciences, 99. *Springer-Verlag, New York*, 1993.

[12] F. Hartung, T. Krisztin, H. -O. Walther, J. Wu, Functional Differential Equations with State Dependent Delays: Theory and Applications, in "Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, Vol. 3", *Elsevier, Amsterdam*, 2006, pp. 435–445

[13] Hernández E., Prokopczyk A., Ladeira L., A note on partial functional differential equations with state-dependent delay. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **7** (2006), no. 4, 510–519.

[14] Jaruszewska–Walczak D., Existence of solutions of first order partial differential-functional equations. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)* **4** (1990), no. 1, 57–82.

[15] Kamont Z., Existence of solutions of first order partial differential functional equations. *Ann. Soc. Math. Polon., Comm. Math.* **25** (1985), 249–263.

[16] Kamont Z., Initial value problems for hyperbolic differential-functional systems. *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)* **8** (1994), no. 4, 965–984.

[17] Kamont Z., Hyperbolic functional differential inequalities and applications. Mathematics and its Applications, 486. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,* 1999.

[18] Kamont Z., On the local Cauchy problem for Hamilton-Jacobi equations with a functional dependence. *Rocky Mountain J. Math.* **30** (2000), no. 2, 587–608.

[19] Kamont Z., First order partial functional differential equations with state dependent delays. *Nonlinear Stud.* **12** (2005), no. 2, 135–157.

[20] Kamont Z., Turo J., Carathédory solutions to hyperbolic functional differential systems with state dependent delays. *Rocky Mountain J. Math.* **35** (2005), no. 6, 1935–1952.

[21] Kolmanovskii V., Myshkis A., Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Mathematics and its Applications, 463. *Kluwer Acad. Publ., Dordrecht,* 1999.

[22] Lakshmikantham V., Leela S., Differential and integral inequalities: Theory and Applications. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 55. *Academic Press, New York-London,* 1969.

[23] Puźniakowska E., Classical solutions of quasilinear differential systems on the Haar pyramid. *Differ. Equ. Appl.* **1** (2009), no. 2, 179–197.

[24] Mallet-Paret J., Nussbaum R. D., Mallet-Paret, John (1-BRN-A); Nussbaum, Roger D. (1-RTG) Boundary layer phenomena for differential-delay equations with state-dependent time lags. *Arch. Rational Mech. Anal.* **120** (1992), no. 2, 99–146.

[25] Rezounenko A. V., Wu J., A non-local PDE model for population dynamics with state-selective delay: Local theory and global attractors. *J. Comput. Appl. Math.* **190** (2006), 99–113.

[26] Rezounenko A. V., Partial differential equations with discrete and distributed state-dependent delays. *J. Math. Anal. Appl.* **326** (2007), 1031–1045.

[27] Stein E. M., Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton Mathematics Series, 30. *Princeton University Press, Princeton,* 1970.

[28] Szarski J., Generalized Cauchy problem for differential-functional equations with first order partial derivatives. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* **24** (1976), no. 8, 575–580.

[29] Szarski J., Cauchy problem for an infinite system of differential-functional equations with first order partial derivatives. *Comment. Math. Special Issue* **1** (1978), 293–300.

[30] Turo J., Generalized solutions of the Cauchy problem for nonlinear functional partial differential equations. *Zeit. Anal. Anwend.* **7** (1988), 127–133.

[31] Walther H. -O., The solution manifold and C^1-smoothness for differential equations with state-dependent delay. *J. Differential Equations* **195** (46–65), 1.2003

Жерноу