

1. Imię i nazwisko: **Szymon Głąb**

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- dyplom magistra matematyki, Politechnika Łódzka, Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej, 2002;
- stopień doktora matematyki, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2007.

3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- stanowisko asystenta w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej w latach 2002–2007;
- stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej od roku 2007.

4. Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

„Liniowalność, domknięta liniowalność i algebraizowalność”.

Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

- [1] Artur Bartoszewicz, Szymon Głąb, Tadeusz Poreda, 2011, On algebrability of nonabsolutely convergent series, *Linear Algebra Appl.*, 435 (2011) 1025–1028.
- [2] Artur Bartoszewicz, Marek Bienias, Szymon Głąb, 2012, Independent Bernstein sets and algebraic constructions, *J. Math. Anal. Appl.*, 393 (2012) 138–143.
- [3] Artur Bartoszewicz, Szymon Głąb, 2012, Algebrability of conditionally convergent series with Cauchy product, *J. Math. Anal. Appl.*, 385 (2012) 693–697.
- [4] Taras Banach, Artur Bartoszewicz, Szymon Głąb, Emilia Szymonik, 2012, Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1 , *Colloq. Math.*, 129 (2012), 75–85.
- [5] Artur Bartoszewicz, Szymon Głąb, 2013, Strong algebrability of sets of sequences and functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141 (2013), 827–835.
- [6] Szymon Głąb, Pedro Kaufmann, Leonardo Pellegrini, 2013, Spaceability and algebrability of sets of nowhere integrable functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141 (2013), 2025–2037.
- [7] Artur Bartoszewicz, Szymon Głąb, Adam Paszkiewicz, 2013, Large free linear algebras of real and complex functions, *Linear Algebra Appl.*, 438 (2013), 3689–3701.

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników.

GENEZA TEMATYKI I MOTYWACJA BADAŃ

Pojęcia liniowalność (*lineability*) oraz domknięta liniowalność (*spaceability*) zostały wprowadzone w 2005 roku w pracy [AGS]. Pojęcie algebraizowalności (*algebrability*) pojawiło się po raz pierwszy w 2007 roku w pracy [ASS]. Wyniki tego typu mają jednak swoje korzenie w pracy Gurarii’ego [G] z roku 1966, który pokazał, że zbiór wszystkich funkcji nigdzie nierównniczkowalnych w $C[0, 1]$ wraz z funkcją zerową zawiera przestrzeń liniową nieskończenie wymiarową. Okazuje się również, że zbiór wszystkich funkcji różniczkowalnych w każdym punkcie zawiera nieskończenie wymiarową przestrzeń liniową, ale nie zawiera domkniętej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni. W 1995 roku Rodríguez-Piazza pokazał w pracy [RP], że każda nieskończenie wymiarowa ośrodkowa

przestrzeń Banacha zanurza się izometrycznie w zbiór wszystkich funkcji nigdzie nieróżniczkowalnych w $C[0, 1]$ wraz z funkcją zerową. Problem algebraizacji rodzin funkcji w 2007 roku badali Bayart i Quarta w pracy [BQ], choć nie posługiwali się tą terminologią.

Badania nad liniowalnością, domkniętą liniowalnością i algebraizowalnością wpisują się w nurt badań nad zbiorami małymi. Chcąc pokazać, że zbiór jest mały można pokazać, że jest on miary zero, pierwszej kategorii lub σ -porowaty. Są to pojęcia wielkości zbioru związane odpowiednio z miarą, topologią i strukturą metryczną. Zbiór, który nie jest liniowalny, domknięto liniowalny czy algebraizowalny jest z punktu widzenia algebraicznego czy algebraiczno-topologicznego zbiorem małym, gdyż nie zawiera dużej podstruktury. Wymienione pojęcia wielkości zbiorów w sensie miarowym i topologicznym są nie tylko różne od algebraicznych, ale także nieporównywalne. W pracy [GQ] zostało wykazane, że zbiór wszystkich funkcji $f \in C[0, 1]$, które osiągają swoje maksimum w dokładnie jednym punkcie nie jest 2-liniowalny. Z drugiej strony jest to zbiór rezydualny w $C[0, 1]$. W pracy [4] wykazaliśmy istnienie w ℓ_1 zbioru rezydualnego, który jest silnie $\mathfrak{c}$ -algebraizowalny, ale nie jest domknięto liniowalny. Wiadomo, że każda właściwa podprzestrzeń domknięta przestrzeni Banacha jest zbiorem porowatym, co pokazuje, że zbiory domknięto liniowalne mogą być małe w sensie metrycznym i topologicznym.

Badania nad liniowalnością i pokrewnymi pojęciami wpisują się także w nurt badań teorii funkcji rzeczywistych polegający na badaniu algebraicznych własności klas funkcji. Zaliczyć do nich można badania maksymalnych klas addytywnych [B], własności różnicy [FR], [F] czy badania sum funkcji z danej klasy [M].

Należy nadmienić, że badania nad liniowalnością, domkniętą liniowalnością i algebraizowalnością prowadzone są intensywnie w ostatnim dziesięcioleciu przez zespoły naukowe w różnych ośrodkach (Hiszpania, Brazylia, USA). Autorami prac z tej tematyki są między innymi tacy matematycy jak Richard Aron [AGS], Per Enflo [EGSS] czy Gilles Godefroy [BaGo]. Według mojej najlepszej wiedzy takich badań wcześniej nie prowadzono w Polsce.

LINIOWALNOŚĆ I ALGEBRAIZOWALNOŚĆ

Niech κ będzie liczbą kardynalną. Mówimy, że podzbiór M przestrzeni liniowej X jest κ -liniowalny, jeśli $M \cup \{0\}$ zawiera podprzestrzeń liniową Y przestrzeni X wymiaru κ . Jeśli X jest algebrą liniową, to $M \subset X$ nazywamy κ -algebraizowalnym, jeśli $M \cup \{0\}$ zawiera algebrę liniową o κ generatorach. Zbiór κ -algebraizowalny jest także κ -liniowalny.

Przedstawię teraz prace wchodzące w skład osiągnięcia w kolejności ich powstawania. Kolejność ta nie pokrywa się z kolejnością drukowania prac w czasopiśmie. W szczególności trzy moje prace przyjęte do druku w Proc. Amer. Math. Soc. czekały prawie dwa lata na publikację (jedna z nich nadal nie jest opublikowana).

Tematykę liniowalności i algebraizowalności zainteresowałem się razem z Arturem Bartoszewiczem pod wpływem artykułu [APESS]. Autorzy tej pracy stwierdzili, że jeśli $CS(\mathbb{K})$ oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych o wyrazach z ciała $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), to $CS(\mathbb{K})$ zawiera podprzestrzeń liniową E taką, że $\text{span}(E \cup c_{00})$ tworzy algebrę, której elementami są albo szeregi z c_{00} albo szeregi warunkowo zbieżne. Analiza przedstawionego dowodu wykazała, że jest on niepoprawny oraz, że fakt ten nie jest prawdziwy, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. W pracy [1] przedstawiliśmy poprawny dowód w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. W pracy [1] rozważaliśmy algebrę A_1 generowaną przez zbiór

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{\alpha}^n}{\ln^{\alpha}(n+1)} : \alpha < \mathfrak{c} \right\},$$

gdzie $\{x_{\alpha} : \alpha < \mathfrak{c}\} \subset \mathbb{C}$ składa się z liczb $|x_{\alpha}| = 1$ takich, że zbiór $\{Arg(x_{\alpha}) : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{\pi\}$ jest liniowo niezależny nad $\mathbb{Q}$. Okazuje się, że A_1 jest $\mathfrak{c}$ -generowana (tzn. nie można jej wygenerować ze zbioru mocy mniejszej niż $\mathfrak{c}$) i $A_1 \setminus \{0\}$ składa się z szeregów warunkowo zbieżnych o wyrazach zespolonych. Niech teraz A_2 będzie algebrą generowaną przez zbiór

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_{\alpha}^n : \alpha < \mathfrak{c} \right\},$$

gdzie $\{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ jest zbiorem liczb dodatnich liniowo niezależnym nad $\mathbb{Q}$. Wówczas A_2 jest $\mathfrak{c}$ -generowana i $A_2 \setminus \{0\}$ składa się z szeregów rozbieżnych o ograniczonych sumach częściowych.

Następnie zastanawialiśmy się, czy teza twierdzenia z pracy [APESS] pozostaje prawdziwa, gdy rozważyć algebrę szeregów formalnych o wyrazach rzeczywistych z iloczynem Cauchy'ego. Okazuje się, że w tym przypadku rodzina szeregów warunkowo zbieżnych jest 1-algebraizowalna [3]. Dokładniej wykazaliśmy, że algebra generowana przez szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ składa się z szeregów warunkowo zbieżnych.

W pracy [5] wprowadziliśmy pojęcie silnej algebraizowalności. Powiemy, że zbiór M jest silnie κ -algebraizowalny, jeśli $M \cup \{0\}$ zawiera wolną algebrę liniową κ generatorów. Jest to równoważne stwierdzeniu, że istnieje zbiór W (wolnych generatorów) mocy κ taki, że dla dowolnego wielomianu $P(x_1, \dots, x_n)$ bez wyrazu wolnego i dowolnych parami różnych $w_1, \dots, w_n \in W$ mamy $P(w_1, \dots, w_n) \in M \setminus \{0\}$. Pokazaliśmy w pracy [5], że silna algebraizowalność jest pojęciem istotnie mocniejszym od algebraizowalności. Na przykład, zbiór c_{00} jest ω -algebraizowalny, ale nie jest silnie 1-algebraizowalny. Ponadto zbiór silnie 1-algebraizowalny jest ω -liniowalny, podczas, gdy zbiór n -algebraizowalny może nie zawierać przestrzeni liniowych nieskończonego wymiaru. Następnie wykazaliśmy, że zbiór $c_0 \setminus \bigcup_{p>1} \ell_p$ jest gęsty w c_0 i silnie $\mathfrak{c}$ -algebraizowalny.

Autorzy pracy [APESS] wykazali, że zbiór ciągów rozbieżnych w l^∞ jest $\mathfrak{c}$ -liniowalny. Wzmocniliśmy znacznie ten fakt, pokazując, że rodzina ciągów z ℓ_∞ , których zbiór punktów skupienia jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora (z dokładnością do zbioru skończonego) jest zbiorem rezydualnym w ℓ_∞ oraz silnie $\mathfrak{c}$ -algebraizowalny.

Autorzy pracy [GPSS] wykazali, że zbiór wszystkich funkcji niemierzalnych $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest $2^{\mathfrak{c}}$ -liniowalny w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Wynik ten wzmocniliśmy w pracy [5], pokazując $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalność zbioru funkcji niemierzalnych w algebrze $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Dokładniej, wykazaliśmy, że zbiór funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że zbiór $f^{-1}(\{x\})$ jest albo pusty albo jest zbiorem Bernsteina, dla każdego $x \in \mathbb{R}$, jest $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalny. Był to pierwszy nietrywialny przykład w literaturze κ -algebraizowalnego zbioru dla $\kappa > \mathfrak{c}$.

Praca [BGPSS] nie wchodzi w skład osiągnięcia, gdyż jeszcze się nie ukazała (od dwóch lat czeka na publikację w Proc. Amer. Math. Soc.). Omawiam tutaj tę pracę ze względu na chronologię oraz fakt, że zawarte w niej idee były rozwijane w kolejnych pracach, które się ukazały i wchodzą w skład osiągnięcia. W pracy [BGPSS] wykazaliśmy, że rodzina wszystkich funkcji Sierpińskiego-Zygmunta, tzn. funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ z obcięciem $f|_S$ nieborelowskim dla każdego zbioru $S \subset \mathbb{R}$ mocy $\mathfrak{c}$, jest silnie κ -algebraizowalny, o ile istnieje rodzina prawie rozłączna podzbiorów $\mathfrak{c}$ mocy κ . Było to wzmocnienie wyniku uzyskanego przez autorów w pracy [GMSS], którzy wykazali, że zbiór wszystkich funkcji Sierpińskiego-Zygmunta jest $\mathfrak{c}^+$ -liniowalny. Był to także pierwszy w literaturze przykład zbioru **silnie** κ -algebraizowalnego dla $\kappa > \mathfrak{c}$.

Funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy wszędzie doskonale surjektywną (*perfectly everywhere surjective*), jeśli $f(P) = \mathbb{R}$ dla każdego niepustego zbioru doskonałego $P \subset \mathbb{R}$. Zbiór wszystkich takich funkcji oznaczmy przez $\mathcal{PES}(\mathbb{R})$. Analogicznie definiujemy zbiór $\mathcal{PES}(\mathbb{C})$. Rodzina $\mathcal{PES}(\mathbb{R})$ nie jest algebraizowalna, bo dla każdej funkcji $f \in \mathcal{PES}(\mathbb{R})$ mamy $f^2 \notin \mathcal{PES}(\mathbb{R})$. W pracy [GMSS] wykazano, że rodzina $\mathcal{PES}(\mathbb{R})$ jest $2^{\mathfrak{c}}$ -liniowalna. Wykazaliśmy jednak, że zbiór $\mathcal{PES}(\mathbb{C})$ jest $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalny. W pracach [ASS] i [ACPSS] rozważano problem algebraizacji zbioru $\mathcal{ES}(\mathbb{C})$ tzw. funkcji wszędzie surjektywnych, czyli funkcji $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, które przekształcają dowolny niepusty zbiór otwarty na $\mathbb{C}$. Oczywiście $\mathcal{ES}(\mathbb{C}) \supset \mathcal{PES}(\mathbb{C})$. Zatem z naszego twierdzenia otrzymujemy następujące wzmocnienie wyników z prac [ASS] i [ACPSS] – zbiór $\mathcal{ES}(\mathbb{C})$ jest $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalny.

J. L. Gámez-Merino, G. A. Muñoz-Fernández J.B. Seoane-Sepúlveda w pracy [GMS2] wykazali, że zbiór wszędzie nieciągłych funkcji $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o własności Darboux jest $2^{\mathfrak{c}}$ -liniowalny. W pracy [BGPSS] wykazaliśmy, że zbiór ten jest $\mathfrak{c}$ -algebraizowalny.

W pracy [2] opracowaliśmy metodę niezależnych zbiorów Bernsteina służącą do dowodzenia $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalności patologicznych funkcji w algebrach liniowych $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. Przez $\mathcal{SES}(\mathbb{C})$ oznaczmy zbiór funkcji z $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$, które na każdym niepustym podzbiorku doskonałym $\mathbb{C}$ osiągają każdą wartość $z \in \mathbb{C}$ continuum wiele razy. Wykazaliśmy, że $\mathcal{SES}(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{PES}(\mathbb{C})$ jest $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalna. Jest to odpowiednik twierdzenia uzyskanego w pracy [GMSS], o tym, że zbiór $\mathcal{SES}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{PES}(\mathbb{R})$ jest $2^{\mathfrak{c}}$ -liniowalny. Wzmocniliśmy wynik z pracy [BGPSS], dowodząc $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalności rodziny wszędzie nieciągłych funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o własności Darboux. W pracy [GMS2] autorzy wykazali, że rodzina wszędzie nieciągłych funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które przekształcają zbiory zwarte na zbiory

zwarte, jest 2^c -liniowa. Używając metody niezależnych zbiorów Bernsteina, wzmocniliśmy ten wynik do 2^c -algebraizowalności.

García-Pacheco, Palmberg i Seoane-Sepúlveda w pracy [GPSS] wykazali ω -liniowość zbioru funkcji $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mających skończenie wiele punktów ciągłości. Następnie Aizpuru, Pérez-Eslava, García-Pacheco i Seoane-Sepúlveda udowodnili, że zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, których zbiór punktów ciągłości jest równy $U(G)$ dla ustalonego zbioru otwartego U (ustalonego zbioru G typu G_δ) jest ω -liniowalny (stożkowalny – coneable). Przy pomocy metody niezależnych zbiorów Bernsteina wykazaliśmy, że rodzina funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, których zbiory punktów ciągłości są równe pewnemu ustalonemu zbiorowi domkniętemu $D \subsetneq \mathbb{R}$, jest 2^c -algebraizowalna.

Azagra, Muñoz-Fernández, Sánchez, Seoane-Sepúlveda wykazali w [AMFSSS], że istnieje c -wymiarowa przestrzeń liniowa $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ składająca się z funkcji ciągłych taka, że dla każdej funkcji $g \in W \setminus \{0\}$ istnieje c -wymiarowa przestrzeń liniowa $V \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ funkcji mierzalnych taka, że $f \circ g$ jest niemierzalna dla dowolnej funkcji $f \in V \setminus \{0\}$. Metoda niezależnych zbiorów Bernsteina pozwoliła na wzmocnienie tego wyniku przez wykazanie, że przestrzeń V jest 2^c -wymiarowa.

Przypomnijmy, że w pracy [BGPSS] wykazaliśmy, że zbiór wszystkich funkcji Sierpińskiego-Zygmunta jest silnie κ -algebraizowalny, o ile istnieje rodzina prawie rozłączna podzbiorów c mocy κ . Ponieważ istnieje model ZFC, w którym każda rodzina prawie rozłącznych podzbiorów c jest mocy mniejszej niż 2^c , powstało pytanie, czy istnieją wolne podalgebry $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ o 2^c -generatorach oraz czy można udowodnić w ZFC, że rodzina funkcji Sierpińskiego-Zygmunta jest silnie 2^c -algebraizowalna. Na pierwsze pytanie odpowiedzieliśmy twierdząco w pracy [7], a na drugie odpowiedzieli przecząco Gamez-Merino i Seoane-Sepúlveda w pracy [GSS].

W pracy [7] opracowaliśmy metodę dowodzenia silnej 2^c -algebraizowalności w algebrach liniowych $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. Wykazaliśmy następujące twierdzenie: „Niech X będzie zbiorem o mocy κ , gdzie $\kappa = \kappa^\omega$. Niech I będzie podzbiorem $\mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) o niepustym wnętrzu. Wówczas istnieje wolna podalgebra $\mathbb{R}^X$ (odpowiednio $\mathbb{C}^X$) o 2^κ generatorach.”

Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ i $I \subset \mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$). Funkcję $f \in \mathbb{C}^X$ (lub $f \in \mathbb{R}^X$) nazywamy I -wszędzie surjektywną względem $\mathcal{F}$, w skrócie $f \in \mathcal{SES}(I, \mathcal{F})$, jeśli dla każdego zbioru $F \in \mathcal{F}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ oraz wielomian n zmiennych P taki, że $f(F) = P(I^n)$ i $|\{x \in F : f(x) = y\}| = |X|$ dla dowolnego $y \in f(F)$. Przy użyciu poprzedniego twierdzenia wykazaliśmy, że jeśli $|\mathcal{F}| \leq \kappa$ oraz $|F| = \kappa$ dla każdego $F \in \mathcal{F}$, to zbiór $\mathcal{SES}(I, \mathcal{F})$ jest silnie 2^κ -algebraizowalny.

Jako zastosowanie uzyskaliśmy wzmocnienia wyników z pracy [2] w kierunku silnej 2^c -algebraizowalności. Jest to pierwsza praca, w której silna 2^c -algebraizowalność zbiorów funkcji w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ została otrzymana bez żadnych dodatkowych założeń teoriomnogościowych. Uzyskane wyniki są wzmocnieniem wyników prac [APGS], [ACPSS], [AGS], [ASS], [GMSS], [GMS2], [GMSS], [GPSS] oraz naszych poprzednich prac [5], [BGPSS] i [2].

Dla zbioru G typu G_δ oznaczmy przez $\mathcal{C}_G$ zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, których zbiór punktów ciągłości jest równy G . Wiadomo, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zbiór punktów ciągłości f jest typu G_δ oraz, że dla każdego zbioru G typu G_δ istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że zbiór punktów ciągłości f jest równy G . W pracy [7] wykazaliśmy, że następujące warunki są równoważne:

- (i) zbiór $\mathcal{C}_G$ jest silnie 2^c -algebraizowalny;
- (ii) zbiór $\mathcal{C}_G$ jest c^+ -liniowalny;
- (iii) zbiór $\mathbb{R} \setminus G$ jest c w sobie gęsty, tzn. $(\mathbb{R} \setminus G) \cap I$ jest zbiorem pustym lub zbiorem mocy c dla każdego przedziału I .

Ponadto udowodniliśmy, że zbiór $\mathcal{C}_G$ jest zawsze c -liniowalny, a w pewnych szczególnych przypadkach silnie c -algebraizowalny.

Prace [1] i [5] były cytowane w artykułach [AM2] i [AMSS].

DOMKNIĘTA LINIOWAŁOŚĆ

Powiemy, że podzbiór M przestrzeni Banacha X jest domknięto liniowalny (*spaceable*), jeśli $M \cup \{0\}$ zawiera nieskończenie wymiarową domkniętą podprzestrzeń. Zauważmy, że każdy domknięto liniowalny zbiór jest jednocześnie c -liniowalny. W pracy [6] rozważaliśmy razem z Pedro

Kaufmannem i Leonardo Pellegrinim domkniętą liniowalność i algebraizowalność rodzin funkcji nigdzie całkowalnych. Pokazaliśmy, że rodzina funkcji nigdzie całkowalnych w sensie Riemanna w L^1 jest domknięto liniowalna i silnie c -algebraizowalna, co jest wzmocnieniem wyniku García-Pacheco, Martína i J.B Seoane-Sepúlvedy z pracy [GMSS]. Następnie rozważaliśmy funkcje, które są nigdzie całkowalne w sensie Newtona. Niech $BV[0, 1]$ oznacza zbiór wszystkich lewostronnie ciągłych funkcji o wahanu skończonym z normą $\|f\| = |f(0)| + V(f)$, gdzie $V(f)$ to wahanie funkcji na przedziale $[0, 1]$. Funkcje z $BV[0, 1]$ są całkowalne w sensie Riemanna. Funkcję nazwiemy całkowalną w sensie Newtona, jeśli spełnia tezę twierdzenia Newtona–Leibniza. Niech $\mathcal{F} \subset BV[0, 1]$ będzie rodziną funkcji, które nie są całkowalne w sensie Newtona na żadnym przedziale. Wykazaliśmy, że $BV[0, 1]$ zawiera nieośrodkową podprzestrzeń zawartą w $\mathcal{F} \cup \{0\}$ oraz, że $\mathcal{F}$ jest silnie c -algebraizowalna. Ostatni wynik naszej pracy mówi, że jeśli $K([0, 1])$ jest przestrzeń Banacha wszystkich funkcji całkowalnych w sensie Kurzweila z normą Alexiewicza, to rodzina funkcji, które nie są całkowalne w sensie Lebesgue’a jest w tej przestrzeni domknięto liniowalna (i nie jest 1-algebraizowalna).

W pracy [4] wspólnie z Tarasem Banakhem, Arturem Bartoszewiczem i Emilią Szymonik rozważaliśmy podzbiory ℓ_1 zdefiniowane za pomocą tzw. sum wyrwanych. Dla $x \in \ell_1$, niech

$$E(x) = \left\{ \sum_{n \in A} x(n) : A \subset \mathbb{N} \right\}.$$

Guthrie i Nymann wykazali w [GN], że możliwe są cztery sytuacje:

(c_{00}) $E(x)$ jest zbiorem skończonym;

($\mathcal{I}$) $E(x)$ jest skończoną sumą przedziałów zwartych;

($\mathcal{C}$) $E(x)$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora;

($\mathcal{MC}$) $E(x)$ jest tzw. M -Cantorvalem (tj. jest to zbiór homeomorficzny z $C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{2n-1}$, gdzie C to klasyczny zbiór Cantora, a S_n oznacza sumę 2^{n-1} otwartych przedziałów usuwanych z odcinka $[0, 1]$ w n -tym kroku konstrukcji klasycznego zbioru Cantora).

Pokazaliśmy, że zbiory $\mathcal{I}$ i $\mathcal{C}$ są silnie c -algebraizowalne, a zbiór $\mathcal{MC}$ jest c -liniowalny. Ponadto $\mathcal{C}$ jest gęstym podzbiorem ℓ_1 typu G_δ , który nie jest domknięto liniowalny, podczas gdy $\mathcal{I}$ jest zbiorem pierwszej kategorii typu F_σ , który jest domknięto liniowalny. Zbiór $\mathcal{C}$ jest pierwszym znanym w literaturze zbiorem, który jest c -liniowalnym rezydualnym zbiorem typu G_δ , ale nie on jest domknięto liniowalny.

Praca [4] doczekała się jednego cytowania w [AMSS].

NOWE METODY BADAWCZE

W tematyce liniowalności i algebraizowalności większość autorów stosuje metody analityczne. Używane przez nas metody były różnorodne - analityczne, algebraiczne oraz teoriomnościowe. Zwłaszcza użycie metod kombinatoryki nieskończonej pozwoliło na znaczne wzmocnienie dotychczasowych wyników.

Nasze prace wzmacniają wiele ze znanych wcześniej wyników dzięki użyciu mowych metod badawczych. Wprowadziliśmy pojęcie silnej algebraizowalności. Opracowaliśmy metodę niezależnych zbiorów Bernsteina oraz metodę dowodzenia silnej 2^c -algebraizowalności w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. W dowodach używaliśmy rodziny zbiorów niezależnych i prawie rozłącznych, strategii w grze Banacha–Mazura, lematu Kroneckera w przypadku wielowymiarowym oraz twierdzenia Pringsheima o iloczynie Cauchy’ego dla szeregów.

OPIS ARTYKUŁÓW BĘDĄCYCH KONTYNUACJĄ CYKLU JEDNOTEMATYCZNEGO

Bernal-González uzyskał w [B-G] następujący wynik. Załóżmy, że (X, μ) jest przestrzenią z miarą taką, że X jest ośrodkową lokalnie zwartą normalną przestrzenią Hausdorffa spełniającą

pierwszy aksjomat przeliczalności, a μ jest ciągłą regularną miarą borelowską o pełnym nośniku. Niech $1 \leq p < \infty$. Wówczas zbiór

$$E := \{f \in L^p : f|_U \notin L^q \text{ dla każdego niepustego zbioru otwartego } U \text{ i każdego } q > p\}$$

jest gęsty w L^p . Bernal-González postawił pytanie o liniowalność i gęstą liniowalność zbioru E . Z drugiej strony zbiór $L^p \setminus \bigcup_{q>p} L^q$, przy pewnych naturalnych założeniach o przestrzeni mierzalnej, jest domknięto liniowalny [GPSS], [BGOC]. W naszej najnowszej pracy [GKP] rozwiązaliśmy z Pedro Kaufmannem i Leonardo Pellegrinim problem Bernal-Gonzáleza, wzmacniając jednocześnie powyższe wyniki. Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną o przeliczalnej π -bazie, a μ jest borelowską miarą bezatomową zewnętrźnie regularną o pełnym nośniku. Pokazaliśmy, że $E \cup \{0\}$ zawiera podprzestrzeń izometryczną z ℓ_p , a więc w szczególności E jest domknięto liniowalny oraz E jest gęsto liniowalny.

W pracy [BG] badaliśmy związki między addytywnością rodzin funkcji i liniowalnością. Gámez-Merino, Munoz-Fernández i Seoane-Sepúlveda w pracy [GMS1] wykazali, że jeśli addytywność $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ rodziny $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jest większa niż $\mathfrak{c}$, to zbiór $\mathcal{F}$ jest $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ -liniowalny. Autorzy zapytali, czy warunek $\mathcal{A}(\mathcal{F}) > \mathfrak{c}$ można osłabić. Odpowiedzieliśmy na to pytanie przecząco.

Nasze pytanie o wolne algebry o $2^{\mathfrak{c}}$ generatorach w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ i $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ stało się inspiracją do podobnych rozważań w algebrach uniwersalnych. Wspólnie z Tarasem Banachem i Arturem Bartoszewiczem pokazaliśmy w pracy [BBS], że jeśli $\mathbb{A} = (A, \mathcal{A})$ jest algebrą, to algebra $\mathbb{A}^X = (A^X, \mathcal{A}^X)$ zawiera zbiór niezależny mocy $2^{|X|}$.

W pracy [2] postawiliśmy pytanie, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest nieciągła w każdym punkcie, przekształca zbiory zwarte na zbiory zwarte oraz przyjmuje nieskończenie wiele wartości na każdym przedziale. W pracy [25] wpólnie z Tarasem Banachem, Arturem Bartoszewiczem i Markiem Bieniasem odpowiedzieliśmy na to pytanie przecząco, rozważając bardziej ogólne pytanie o własności funkcji przekształcających zbiory zwarte na zbiory zwarte w przestrzeniach topologicznych. Uzyskany wynik pokazuje, że zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nieciągłych w żadnym punkcie i przekształcających zbiory zwarte na zbiory zwarte nie jest silnie 1-algebraizowalny (choć jest $2^{\mathfrak{c}}$ -algebraizowalny).

Dalsze badania nad problemami liniowalności, domkniętej liniowalności i algebraizowalności będą kontynuowane w ramach grantu SONATA pt. *Wolność i niezależność w algebrze i topologii*, który został zakwalifikowany do realizacji w NCN-ie. Grant będzie wykonywany wspólnie z Tarasem Banachem.

5. Na pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze składają się następujące publikacje.

Publikacje naukowe w czasopismach znajdujących się w bazie Journal Citation Reports (JRC):

- [8] Szymon Głąb, 2007, Descriptive properties related to porosity and density for compact sets on the real line, *Acta Math. Hungar.*, 116 (1-2) (2007), 61–71. [IF 2007: 0,366]
- [9] Szymon Głąb, 2008, Descriptive properties of families of autohomeomorphisms of the unit interval, *J. Math. Anal. Appl.*, 343 (2008) 835–841. [IF 2008: 1,046]
- [10] Szymon Głąb, 2009, Descriptive set-theoretical properties of an abstract density operator, *Cent. Eur. J. Math.* 7(4), 2009, 732–740. [IF 2009: 0,361]
- [11] Marek Balcerzak, Szymon Głąb, 2010, On the Laczovich–Komjath property of sigma-ideals, *Topology Appl.*, 157 (2010), 319–326. [IF 2010: 0,447]
- [12] Marek Balcerzak, Szymon Głąb, 2010, Measure-category properties of Borel plane sets and Borel functions of two variables, *Acta Math. Hungar.*, 126 (3) (2010), 241–252. [IF 2010: 0,521]
- [13] Szymon Głąb, Filip Strobina, 2010, Dichotomies for L^p spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 368 (2010) 382–390. [IF 2010: 1,174]
- [14] Szymon Głąb, Filip Strobina, 2010, Descriptive properties of density preserving autohomeomorphisms of the unit interval, *Cent. Eur. J. Math.*, 8(5), 2010, 928–936. [IF 2010: 0,581]

- [15] Szymon Głąb, Filip Strobín, 2010, Porosity and the L^p -conjecture, *Arch. Math.*, 95 (2010), 583–592. [IF 2010: 0,483]
- [16] Artur Bartoszewicz, Szymon Głąb, Artur Wachowicz, 2011, Remarks on ideal boundedness, convergence and variation of sequences, *J. Math. Anal. Appl.* 375 (2011) 431–435. [IF 2011: 1,001]
- [17] Szymon Głąb, 2011, LK property for σ -ideals, *Topology Appl.*, 158 (2011) 93–100. [IF 2011: 0,445]
- [18] Piotr Borodulin-Nadzieja, Szymon Głąb, 2011, Ideals with bases of unbounded Borel hierarchy, *MLQ Math. Log. Q.*, 57 (2011), No. 6, 582–590. [IF 2011: 0,496]
- [19] Marek Galewski, Szymon Głąb, 2012, On the discrete boundary value problem for anisotropic equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 386 (2012) 956–996. [IF 2011: 1,001]
- [20] Marek Galewski, Szymon Głąb, 2012, Continuous dependence on parameters for second order discrete BVP's, *Cent. Eur. J. Math.*, 10(3) (2012) 1076–1083. [IF 2011: 0,440]
- [21] Marek Galewski, Szymon Głąb, Renata Wieteska, 2013, Positive solutions for anisotropic discrete BVP, *Electron. J. Diff. Equ.*, 32 (2013), 1–9. [IF 2011: 0,427]
- [22] Szymon Głąb, Filip Strobín, 2013, Dichotomies for $C_0(X)$ and $C_b(X)$ spaces, *Czechoslovak Math. J.*, 63(1), (2013), 91–105. [IF 2011: 0,262]
- [23] Szymon Głąb, Filip Strobín, Chan Woo Yang, 2013, Dichotomies for Lorentz spaces, *Cent. Eur. J. Math.*, 2013, 11(7), 1228–1242. [IF 2011: 0,440]
- [24] Marek Balcerzak, Barnabas Farkas, Szymon Głąb, 2013, Covering properties of ideals, *Archive for Mathematical Logic.*, 52 (2013), 279–294. [IF 2011: 0,341]
- [25] Taras Banach, Artur Bartoszewicz, Marek Bienias, Szymon Głąb, 2013, The continuity properties of compact-preserving functions, *Topology Appl.*, 160 (2013), 937–942. [IF 2011: 0,445]

Publikacje naukowe w pozostałych czasopismach:

- [26] Szymon Głąb, 2002, Local and global monotonicity, *Real Anal. Exchange*, 27 (2001/02), no. 2, 765–771.
- [27] Szymon Głąb, 2004, On the converse of Caristi's fixed point theorem, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 52 (2004), no. 4, 411–416.
- [28] Szymon Głąb, 2006, On parametric limit superior of a sequence of analytic sets, *Real Anal. Exchange*, 31 (2005/06), no. 1, 285–289.
- [29] Szymon Głąb, 2009, On complexity of continuous functions differentiable on cocountable sets, *Real Anal. Exchange*, 34(2), 2008/2009, 521–530.

Moje pierwsze dwie prace [26] i [27] zawierają wyniki uzyskane jeszcze podczas studiów magisterskich. Choć ukazały się, gdy pracowałem nad doktoratem, to nie stały się jego częścią.

Głównym celem mojej rozprawy doktorskiej, na podstawie której powstały cztery publikacje [8], [9], [29] i [11], było badanie pewnych zbiorów, które w naturalny sposób pojawiają się w analizie matematycznej, z punktu widzenia opisowej teorii mnogości. Pokazałem, że pewne rodzaje zbiorów w przestrzeniach polskich mające względnie prosty opis są koanalityczne nieborelowskie. W pracy [8] rozważałem rodziny zwartych niepustych podzbiorów prostej opisanych za pomocą operatora gęstości Lebesgue'a i operatora porowatości. W szczególności pokazałem, że rodzina zbiorów zwartych na prostej, które w żadnym punkcie nie są obustronnie porowate, jest podzbiorem nieborelowskim hiperprzestrzeni $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ zbiorów zwartych niepustych z topologią Vietoris'a. W [9] pokazałem, że zbiór ściśle singularnych homeomorfizmów przedziału $[0, 1]$ jest koanalityczny nieborelowski, co było rozwiązaniem problemu postawionego przez Mauldina i Grafa w [GMW].

W [29] wykazałem, że zbiór funkcji w $C[0, 1]$, które są różniczkowalne poza zbiorem przeliczalnym jest zbiorem koanalitycznym nieborelowskim, co było uogólnieniem wyniku uzyskanego przez Sofronidisa w [S]. Po doktoracie kontynuowałem tę tematykę. W pracy [10] uogólniałem wyniki artykułu [8] na przypadek abstrakcyjnych operatorów gęstości. We współpracy z Filipem Strobiniem wykazaliśmy w [14], że rodzina homeomorfizmów odcinka $[0, 1]$ zachowujących punkty gęstości Lebesgue'a jest zbiorem koanalitycznym nieborelowskim.

Laczkovich w swojej pracy [L] pokazał, że jeśli (B_n) jest ciągiem zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$ taki, że dla każdego nieskończonego zbioru indeksów $H \subset \mathbb{N}$, zbiór

$$\limsup_{n \in H} B_n = \{x \in \mathbb{R} : x \in B_n \text{ dla nieskończenie wielu } n \in H\}$$

jest nieprzeliczalny, to istnieje nieskończony zbiór $G \subset \mathbb{N}$ taki, że iloczyn $\bigcap_{n \in G} B_n$ jest nieprzeliczalny. Na pytanie, czy można osłabić założenie o tym, że zbiory B_n są borelowskie, odpowiedział Komjáth w pracy [K]. Wykazał on, że własność udowodniona przez Laczkovicha pozostaje prawdziwa, jeśli założymy, że ciąg (B_n) składa się ze zbiorów analitycznych. W rozprawie doktorskiej rozważałem własność σ -ideałów w przestrzeniach polskich, którą nazwałem własnością Laczkovicha-Komjátha (LK). Niech X będzie nieprzeliczalną przestrzenią polską a $\mathcal{I}$ ideałem podzbiorów X . Powiemy, że $\mathcal{I}$ ma własność (LK), gdy dla każdego ciągu (A_n) podzbiorów analitycznych przestrzeni X , jeżeli

$$\forall H \in [\omega]^\omega \quad \limsup_{n \in H} A_n \notin \mathcal{I},$$

to istnieje zbiór $G \in [\omega]^\omega$ spełniający warunek

$$\bigcap_{n \in G} A_n \notin \mathcal{I}.$$

W pracy [11] wykazaliśmy z Markiem Balcerzakiem, że własność (LK) mają σ -ideały generowane przez relacje równoważności typu F_σ w przestrzeniach polskich. Wynik ten został uogólniony na relacje koanalityczne przez Gao, Jacksona i Kiefenbelda w pracy [GJK]. W pracy [28] wykazałem parametryczną wersję wyniku Komjátha. W artykule [11] został podany warunek konieczny na to, by ideał o własności (LK) miał również parametryczną własność (LK). Własność (LK) badałem po doktoracie w pracy [17], gdzie podałem kolejne przykłady σ -ideałów o tej własności. Własność ta była także badana przez Zapletala [Z] oraz przez Conley'a, Lecomte'a i Millera w pracy [CLM]. Prace [11] i [28] były cytowane przez [Z].

Wspólnie z Filipem Strobiniem badaliśmy własność operacji mnożenia i splotu z punktu widzenia σ -porowatości. Owocem tej pracy były cztery artykuły [13], [15], [22] oraz [23]. Ostatnia z tych prac została napisana we współpracy z południowokoreańskim matematykiem Chan Woo Yang. Niech (X, μ) będzie przestrzenią z miarą a $L^p(X)$ przestrzenią wszystkich funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. W pracy [13] pokazaliśmy, że zbiór

$$\{(f_1, \dots, f_n) \in L^{p_1}(X) \times \dots \times L^{p_n}(X) : f_1 \cdots f_n \in L^r(X)\}$$

jest albo równy całej przestrzeni $L^{p_1}(X) \times \dots \times L^{p_n}(X)$ albo jest σ -porowatym podzbiorem $L^{p_1}(X) \times \dots \times L^{p_n}(X)$. Zależy to od następujących warunków:

- (a) jaki jest znak liczby $\frac{1}{r} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$;
- (b) czy liczba $\inf\{\mu(A) : \mu(A) > 0\}$ jest równa czy większa od zera;
- (c) czy wartość $\sup\{\mu(A) : \mu(A) < \infty\}$ jest skończona czy nieskończona.

W pracy [23] uogólniliśmy ten wynik na przestrzenie Lorentza, uzyskując analogiczną dychotomię. W pracy [22] badaliśmy podobną własność w przestrzeni $C_0(X)$ funkcji znikających w nieskończoności określonych na przestrzeni lokanie zwartej X , która nie jest zwarta, z miarą wewnętrzenie regularną, a także w przestrzeni $C_b(X)$ funkcji ograniczonych określonych na przestrzeni normalnej X z miarą wewnętrzenie regularną. W artykule [15] rozważaliśmy lokalnie zwarte grupy G z lewostronną miarą Haara μ . Założymy, że $1/p + 1/q < 1$ i K jest dowolnym zwartym podzbiorem

G . Niech $f \star g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)d\mu(y)$ będzie splotem funkcji f i g . Pokazaliśmy następującą dychotomię: zbiór

$$\{(f, g) \in L^p(G) \times L^q(G) : \exists x \in K \text{ splot } f \star g(x) \text{ jest dobrze określony}\},$$

jest równy $L^p(G) \times L^q(G)$, jeśli G jest grupą zwartą, oraz jest on zbiorem σ -porowatym, gdy G nie jest zwarta. Tematyka ta ma swoją kontynuację w pracach [AM1] i [AM2] irańskich matematyków Akbarbaglu i Maghsoudi. Każda z prac [13] i [15] była cytowana w [AM1], [AM2] i [AMSS]. Praca [22] była cytowana w [AMSS].

W pracach [12], [18], [16], [BGRZ], [GO] oraz [24] rozważam ze współautorami różne własności zbiorów małych, ideałów i σ -ideałów. Prace te są luźno powiązane tematycznie. W pracy [18] rozważaliśmy wspólnie z Piotrem Borodulinem-Nadzieją σ -ideały w przestrzeniach polskich i w grupach polskich, które mają bazy borelowskie, ale nie mają bazy borelowskiej złożonej ze zbiorów Σ_α^0 dla żadnego $\alpha < \omega_1$. Zaproponowaliśmy konstrukcje licznych σ -ideałów o tej własności. Jeden z problemów postawionych w pracy doczekał się rozwiązania przez Rosłanowskiego i Shelaha [RS].

W pracy [16] razem z Arturem Bartoszewiczem i Arturem Wachowiczem rozwiązaliśmy problem postawiony w pracy [FGT] dotyczący istnienia ideału $\mathcal{I}$ na liczbach naturalnych dla którego zachodzi równość $W(\mathcal{I}) = c^*(\mathcal{I})$, tzn. rodzina wszystkich ciągów o skończonym $\mathcal{I}$ -wahaniu jest równa rodzinie wszystkich ciągów (x_n) , dla których istnieje zbiór $N \subset \mathbb{N}$ taki, że $\mathbb{N} \setminus N \in \mathcal{I}$ oraz $(x_n)_{n \in N}$ jest zbieżny. Wykazaliśmy istnienie takiego ideału przy dodatkowym założeniu teoriomnościowym $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$. W pracy [12] wspólnie z Markiem Balcerzakiem rozważaliśmy mieszane produkty Fubini ideałów miary i kategorii. Pokazaliśmy, że nie są one niezmiennicze na nietrywialne obroty, opisaliśmy „ładne” bazy tych ideałów oraz pokazaliśmy jednostajne wersje twierdzeń Luzina i Nikodyma dla funkcji dwóch zmiennych.

W pracy [24] wspólnie z Markiem Balcerzakiem i Barnabaszem Farkasem badaliśmy własność pokrycia dla ideałów. Niech X będzie przestrzenią polską i niech $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{I}$ będą odpowiednio σ -ciałem zbiorów borelowskich i σ -ideałem o bazie borelowskiej. Niech dodatkowo $\mathcal{J}$ będzie ideałem podzbiorów $\mathbb{N}$. Powiemy, że $\mathcal{I}$ ma własność $\mathcal{J}$ -pokrycia, jeśli dla każdego ciągu (A_n) zbiorów borelowskich takiego, że $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$, istnieje zbiór indeksów $S \in \mathcal{J}$ taki, że $X \setminus \limsup_{n \in S} A_n \in \mathcal{I}$. Definicja ta jest motywowana pracą [E] Elekesa, gdzie była rozważana powyższa własność w przypadku, gdy $\mathcal{I}$ jest σ -ideałem zbiorów miary zero, zaś $\mathcal{J}$ jest ideałem zbiorów o gęstości zero. W pracy badamy związek między własnością pokrycia i własnościami forsyngu $\mathbb{P}_{\mathcal{I}} = (\mathcal{B} \setminus \mathcal{I}, \subset)$. W pracy podaliśmy charakteryzację ideałów borelowskich $\mathcal{J}$ dla których σ -ideał zbiorów pierwszej kategorii ma własność pokrycia. Podaliśmy liczne przykłady par $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ dla których własność pokrycia zachodzi oraz tych dla których nie zachodzi. Wykazaliśmy także pewne strukturalne twierdzenia dotyczące własności pokrycia.

Prace [19]-[21] dotyczą równań różnicowych. Wspólnie z Markiem Galewskim badaliśmy istnienie rozwiązań pewnych równań różnicowych używając metod rachunku wariacyjnego. W pracy [20] badaliśmy rozwiązania pewnego równania przez wyznaczenie punktów siodłowych funkcjonału związanego z tym równaniem. Dokładniej, zbadane zostało istnienie rozwiązań układu równań różnicowych oraz jego zależności od parametru. Zastosowano nierówność min-max von Neumanna oraz metody wariacyjne. W pracy [19] zbadano istnienie rozwiązań dyskretnego równania anizotropowego z warunkami brzegowymi typu Dirichleta. Zastosowano bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego oraz Lemat o Przełęczy Górskiej. W tej samej pracy podane zostało twierdzenie o istnieniu trzech punktów krytycznych dla pewnych nieliniowych funkcjonałów działania. Szczególnym przypadkiem takiego funkcjonału, jest funkcjonał Eulera związany z równaniem anizotropowym dyskretnym. Wprowadzone przez nas twierdzenia rozszerzają wyniki uzyskane w pracach [MRT] i [CIT]. Badanie istnienia co najmniej trzech rozwiązań dla zadań brzegowych zarówno ciągłych jak i dyskretnych zostało zapoczątkowane w pracach Ricceriego i kontynuowane przez szkołę matematyków włoskich [R1], [R2], [R3], [R4], [CIT], [Bo] i [Ch]. Usykany przez nas rezultat wpisuje się w nurt badań idący co prawda w kierunku zastosowań do problemów dyskretnych, ale wydaje się, że zastosowanie uzyskanego rezultatu do problemów ciągłych jest również możliwe przy wariacie badań z zastosowaniem słabych topologii. W pracy [21] podaliśmy warunki dostateczne na istnienie rozwiązań dodatnich równania anizotropowego. Zastosowano Lemat o Przełęczy Górskiej w przypadku funkcjonału niekorektywnego (oraz nie antykorektywnego) wraz z twierdzeniem Karusha-Kuhna-Tuckera. Uzyskane wyniki są wzmocnieniem rezultatów podanych w [TG] nawet

dla przypadku p -Laplasjaniu i mogą one być rozszerzone w kontekście zastosowania twierdzeń o trzech punktach krytycznych do uzyskania nowych wyników dotyczących rozwiązań wielokrotnych. Praca [19] była cytowana w [BJS1], [BJS2] i [BE].

6. Kształcenie młodej kadry.

W skład mojego dorobku wchodzi artykuły napisane wspólnie z doktorantami Instytutu Matematyki Politechniki Łódzkiej [2], [4], [21], [25] oraz [BGRZ], [GO].

LITERATURA

- [APGS] A. Aizpuru, C. Pérez-Eslava, F. J. García-Pacheco, J. B. Seoane-Sepúlveda, Lineability and coneability of discontinuous functions on $\mathbb{R}$. *Publ. Math. Debrecen* **72** (2008), no. 1-2, 129–139.
- [APESS] Aizpuru, A.; Pérez-Eslava, C.; Seoane-Sepúlveda, J. B., Linear structure of sets of divergent sequences and series. *Linear Algebra Appl.* **418** (2006), no. 2-3, 595–598.
- [AM1] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, An answer to a question on the convolution of functions. *Arch. Math.* **98**, (2012) No. 6, 545–553.
- [AM2] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, Large structures in certain subsets of Orlicz spaces. *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), no. 11, 4363–4373.
- [AMSS] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, J. B. Seoane-Sepúlveda, Porous sets and lineability of continuous functions on locally compact groups, *J. Math. Anal. Appl.* (2013) <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.04.051>
- [ACPSS] R.M. Aron, J.A. Conejero, A. Peris, J.B. Seoane-Sepúlveda, Uncountably generated algebras of everywhere surjective functions, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **17** (2010), no. 3, 571–575.
- [AGS] R.M. Aron, V.I. Gurariy, J. B. Seoane-Sepúlveda, Lineability and spaceability of sets of functions on $\mathbb{R}$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 3, 795–803
- [ASS] R.M. Aron, J.B. Seoane-Sepúlveda, Algebrability of the set of everywhere surjective functions on $\mathbb{C}$, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **14** (2007), no. 1, 25–31.
- [AMFSSS] D. Azagra, G.A. Muñoz-Fernández, V.M. Sánchez, J.B. Seoane-Sepúlveda, Riemann integrability and Lebesgue measurability of the composite functions, *J. Math. Anal. Appl.* **354** (2009), no. 1, 229–233.
- [BBS] T. Banach, A. Bartoszewicz, S. Głąb, Large free sets in powers of universal algebras, praca w przyjętej *Algebra Universalis*.
- [BaGo] P. Bandyopadhyay, G. Godefroy, Linear structures in the set of norm-attaining functionals on a Banach space. *J. Convex Anal.* **13** (2006), no. 3-4, 489–497.
- [BG] A. Bartoszewicz, S. Głąb, Additivity and lineability in vector spaces, preprint, [arXiv:1304.6848](https://arxiv.org/abs/1304.6848).
- [BGPSS] A. Bartoszewicz, S. Głąb, D. Pellegrino i J. B. Seoane-Sepúlveda, Algebrability, non-linear properties, and special functions, praca przyjęta w *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [BQ] F. Bayart and L. Quarta, Algebras in sets of queer functions. *Israel J. Math.* **158** (2007), 285–296.
- [BJS1] C. Bereanu, P. Jebelean, C. Serban. Ground state and mountain pass solutions for discrete $p(\cdot)$ -Laplacian. *Bound. Value Probl.* (2012) 2012:104.

- [BJS2] C. Bereanu, P. Jebelean, C. Serban. Periodic and Neumann problems for discrete $p(\cdot)$ -Laplacian. *J. Math. Anal. Appl.* 399 (2013) 75–87.
- [B-G] L. Bernal-González, Algebraic genericity and strict-order integrability, *Studia Math.* 199(3) (2010), 279–293.
- [BGOC] L. Bernal-González, M. Ordóñez Cabrera, Spaceability of strict order integrability, *J. Math. Anal. Appl.* 385 (2012), 303–309.
- [BGRZ] M. Bienias, S. Głąb, R. Rałowski, S. Żeberski. Some remarks on two point set, praca przyjęta w Czechoslovak Math. J.
- [Bo] G. Bonanno, A minimax inequality and its applications to ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 270 (2002) 210–229.
- [B] A. M. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 659, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.
- [BE] H. Bueno, G. Ercole, A quasilinear problem with fast growing gradient, *Appl. Math. Lett.* 26 (2013), no. 4, 520–523.
- [CIT] A. Cabada, A. Iannizzotto, S. Tersian, Multiple solutions for discrete boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.* 356 (2009), no. 2, 418–428.
- [Ch] J. Chabrowski, *Variational Methods for Potential Operator Equations*, Walter de Gruyter & Co., 1997.
- [CLM] C.T. Conley, D. Lecomte, B.D. Miller, Descriptive set-theoretic dichotomy theorems and limits superior, preprint dostępny na stronie <http://www.logic.univie.ac.at/conley8/onlinepapers/KomjathLaczkovich.pdf>
- [E] M. Elekes. A covering theorem and the random-indestructibility of the density zero ideal, *Real Anal. Exchange*, 37 (2011-12), no. 1, 55–60.
- [EGSS] P. Enflo, V. I. Gurariy, J. B. Seoane-Sepúlveda, On lineability and spaceability of sets in function spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, w druku.
- [FGT] A. Faisant, G. Grekos, V. Toma, On the statistical variation of sequences, *J. Math. Anal. Appl.* 306 (2005), no. 2, 432–439.
- [FR] R. Filipów, I. Reclaw; On the difference property of Borel measurable and (s)-measurable functions, *Acta Math. Hungar.* 96 (2002), no. 1-2, 21–25.
- [F] R. Filipów, On the difference property of the family of functions with the Baire property, *Acta Math. Hungar.* 100 (2003), no. 1-2, 97–104.
- [GMSS] J.L. Gámez-Merino, G.A. Munoz-Fernández, V.M. Sánchez, J.B. Seoane-Sepúlveda, Sierpiński-Zygmund functions and other problems on lineability, *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (11) (2010) 3863–3876.
- [GMS1] J.L. Gámez-Merino, G.A. Munoz-Fernández, J.B. Seoane-Sepúlveda, Lineability and additivity in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *J. Math. Anal. Appl.* 369 (2010), no. 1, 265–272.
- [GMS2] J.L. Gámez-Merino, G.A. Munoz-Fernández, J.B. Seoane-Sepúlveda, A characterization of continuity revisited, *Amer. Math. Monthly* 118 (2011), no. 2, 167–170.
- [GSS] J. L. Gámez-Merino, J. B. Seoane-Sepúlveda, An undecidable case of lineability in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *J. Math. Anal. Appl.* 401 (2013), no. 2, 959–962.
- [GJK] S. Gao, S. Jackson, V. Kieftenbeld, The Laczkovich–Komjáth property for coanalytic equivalence relations. *The J. Symb. Logic* 75 (2010), no. 3, 1091–1101.

- [GMSS] F.J. García-Pacheco, M. Martín, J.B Seoane-Sepúlveda, Lineability, spaceability and algebraability of certain subsets of function spaces, *Taiwanese J. Math.* **13** (2009), no. 4, 1257–1269.
- [GPSS] F.J. García-Pacheco, N. Palmberg, J.B Seoane-Sepúlveda, Lineability and algebraability of pathological phenomena in analysis, *J. Math. Anal. Appl.* **326** (2007) 929–939.
- [GPSS] F. J. García-Pacheco, C. Pérez-Eslava and J. B. Seoane-Sepúlveda, Moduleability, algebraic structures and nonlinear properties *J. Math. Anal. Appl.*, 370 (2010), 159–167.
- [GPSS] F. J. García-Pacheco and J. B. Seoane-Sepúlveda, Vector spaces of non-measurable functions, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* **22** (2006), no. 6, 1805–1808.
- [GKP] S. Głąb, P. Kaufmann, L. Pellegrini. Large structures made of nowhere L^p functions, arXiv:1207.3818, praca wysłana.
- [GO] S. Głąb, M. Olczyk. Convergence of series on large set of indexes, praca przyjęta w *Math. Slovaca*.
- [GMW] S. Graf, R.D. Mauldin, S.C. Williams, Random homeomorphisms, *Adv. Math.* 60 (1986), no. 3, 239–359.
- [G] V.I. Gurariy, Subspaces and bases in spaces of continuous functions, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 167 (1966) 971–973 (po rosyjsku).
- [GQ] V. I. Gurariy, L. Quarta, On lineability of sets of continuous functions, *J. Math. Anal. Appl.* 294 (2004), 62–72.
- [GN] J. A. Guthrie, J. E. Nymann, The topological structure of the set of subsums of an infinite series, *Colloq. Math.* 55 (1988), no. 2, 323–327.
- [K] P. Komjáth, On the limit superior of analytic sets, *Anal. Math.* 10 (1984), 283–293.
- [L] M. Laczkovich, On the limit superior of sequence of sets, *Anal. Math.* 3 (1977), 199–206.
- [M] A. Maliszewski, On the sums and the products of Darboux cliquish functions, *Acta Math. Hungar.* 73 (1996), no. 1–2, 87–95.
- [MRT] M. Mihăilescu, V. Rădulescu, S. Tersian, Eigenvalue problems for anisotropic discrete boundary value problems. *J. Difference Equ. Appl.* 15 (2009), no. 6, 557–567.
- [R1] B. Ricceri, A multiplicity theorem in R_n , *J. Convex Anal.* 16 (2009) 987–992.
- [R2] B. Ricceri, A class of nonlinear eigenvalue problems with four solutions, *J. Nonlinear Convex Anal.* 11 (2010), 503–511.
- [R3] B. Ricceri, A three critical points theorem revisited, *Nonlinear Anal.* 70 (2009), 3084–3089.
- [R4] B. Ricceri, Multiplicity of global minima for parametrized functions, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* 21 (2010), 47–57.
- [RP] Rodríguez-Piazza, L. Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 123 (1995), no. 12, 3649–3654.
- [RS] A. Rosłanowski, S. Shelah, Around cofin, arXiv:1304.5683.
- [S] N. E. Sofronidis, The set of continuous piecewise differentiable functions, *Real Anal. Exchange* 31 (2005/2006), no. 1, 13–22.
- [TG] Y. Tian, W. Ge, Existence of multiple positive solutions for discrete problems with p -Laplacian via variational methods. *Electron. J. Diff. Equ.* 2011, No. 45, 8 pp.
- [Z] J. Zapletal, More σ -ideals with the Laczkovich-Komjáth property. *Topology Appl.* 158 (2011), no. 9, 1149–1156.

Łódź, 28.05.2013

Szymon Głab
.....
Szymon Głab

