

4. GEOMETRYCZNY OPIS WIĄZKI GAUSSOWSKIEJ

Uproszczenie skalarne równania Helmholtza do równania przyosiowego okazało się bardzo użyteczne. Rozwiązania tego równania zaowocowały wprowadzeniem struktury modowej propagującej się wiązki laserowej. Należy sobie jednak zdawać sprawę z tego, że te rozwiązania mają charakter przybliżony. Ich dokładność maleje w miarę oddalania się od osi wiązki i wraz z rzędem modów.

Wszystkie zaproponowane w rozdziale 3. przybliżone metody opisu propagacji wiązki laserowej bazowały na obrazie falowym takiej wiązki. Innym obrazem stosowanym do opisu propagacji wiązek optycznych jest obraz geometryczny, bazujący na pojęciu promieni świetlnych. Oba podejścia konkurowały ze sobą aż do czasów J. C. Maxwella, kiedy to teoria falowa zyskała na znaczeniu. Jednakże współczesna optyka geometryczna pozwala osiągnąć wyniki całkowicie zgodne z rezultatami optyki falowej. W niektórych przypadkach metody optyki geometrycznej są znacznie efektywniejsze od metod optyki falowej.

Opis metod optyki geometrycznej można znaleźć w wielu podręcznikach. Dalsza część tego rozdziału oparta jest w znacznej części na książce Krawcowa i Orłowa [21].

Opis wiązki gaussowskiej podany poniżej będzie wykorzystywany w dalszej części pracy.

4.1. Równania optyki geometrycznej dla równania Helmholtza

Informacja o rozkładzie natężenia światła w monochromatycznej wiązce o częstotliwości kątowej ω propagującej się w danym ośrodku jest zawarta w skalarzym równaniu Helmholtza wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi (por. (5)):

$$\Delta u(\vec{r}) + k_0^2 \varepsilon(\vec{r}) u(\vec{r}) = 0, \quad (87)$$

gdzie

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad \varepsilon(\vec{r}) = n^2(\vec{r}). \quad (88)$$

We wzorach (87) i (88) c oznacza prędkość światła w próżni, natomiast $\varepsilon(\vec{r})$ i $n(\vec{r})$ przenikalność dielektryczną względną i współczynnik załamania ośrodka odpowiednio. Ostatnia relacja w (88) obowiązuje dla ośrodków niemagnetycznych. Podstawowe rozwiązania równania (87) dla ośrodka jednorodnego o współczynniku załamania $n = n_0 = \text{const}$ są dobrze znane. Przykładowo, rozwiązanie w postaci nietłumionej, jednorodnej fali płaskiej można zapisać w postaci:

$$u(\vec{r}) = A \exp(i\Psi(\vec{r})), \quad \Psi(\vec{r}) = k_0 n_0 \vec{r} \circ \vec{e}_k, \quad (89)$$

gdzie A jest amplitudą (stałą) fali, $\vec{e}_k$ oznacza wektor jednostkowy w kierunku propagacji fali, a $\Psi(\vec{r})$ jest jej fazą.

W przypadku ogólnym (dowolna fala, dowolny ośrodek) w ramach optyki geometrycznej rozwiązań równania (1) poszukuje się w postaci:

$$u(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp(i\Psi(\vec{r})), \quad \Psi(\vec{r}) = k_0 \psi(\vec{r}). \quad (90)$$

Wielkość $\psi(\vec{r})$ nosi nazwę eikonalu fali. W większości zastosowań optyki geometrycznej dość restrykcyjnie (ale nie zawsze, z czego będzie korzystać się w tej pracy) przestrzega się założenia, że eikonał nie zależy od liczby falowej k_0 . Wynika to stąd, że rozkład przestrzenny $A(\vec{r})$ amplitudy fali jest poszukiwany w postaci szeregu względem potęg odwrotności tej liczby falowej:

$$A(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\vec{r})}{(ik_0)^m}. \quad (91)$$

Powyższe rozwinięcie amplitudy fali na „amplitudy cząstkowe” nosi nazwę rozwinięcia Debye’a lub rozwinięcia Luneburga–Kleina. Szereg (91) jest tym szybciej zbieżny im większą wartość ma liczba falowa k_0 . Z tego względu optykę geometryczną określa się jako krótkofalową granicę optyki falowej. Po podstawieniu założonej postaci rozwiązania do równania Helmholtza (77) otrzymujemy układ równań różniczkowych dla eikonału ψ i dla amplitud A_m :

$$\left. \begin{aligned} (\vec{\nabla} \psi)^2 &= n^2 \\ 2(\vec{\nabla} A_0) \circ (\vec{\nabla} \psi) + A_0 \Delta \psi &= 0 \\ 2(\vec{\nabla} A_1) \circ (\vec{\nabla} \psi) + A_1 \Delta \psi &= -\Delta A_0 \\ &\vdots \\ 2(\vec{\nabla} A_m) \circ (\vec{\nabla} \psi) + A_m \Delta \psi &= -\Delta A_{m-1} \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

W 200 m na powierzchni
i w klesz, przy amplitudzie
 A_0, A_1 i A_m
w punkcie α i β i γ
W 200 m
 A_0, A_1 i A_0

Pierwsze z tych równań nosi nazwę równania eikonału, a pozostałe równań transportu odpowiednio zerowego, pierwszego itd. rzędu. Dla uproszczenia w równaniach (92) nie zapisano jawnie zależności amplitud i eikonału od położenia. Jak widać, rozwiązując równanie transportu m -tego rzędu możemy wyznaczyć rozkład przestrzenny amplitudy też m -tego rzędu, pod warunkiem, że znamy rozkład przestrzenny amplitudy rzędu $m-1$ oraz eikonał. Nie dotyczy to, oczywiście, amplitudy zerowego rzędu, do wyznaczenia której niezbędna jest tylko znajomość eikonału. Oznacza to, że „źródłem” amplitud rzędów od pierwszego począwszy są amplitudy rzędu o jeden niższego. Przyjmuje się, że te amplitudy opisują efekty dyfrakcyjne towarzyszące propagacji wiązki falowej.

Warunki brzegowe dla równania Helmholtza mają postać rozkładu wartości amplitudy fali $u = u^0(\xi, \eta)$ zadanego na pewnej powierzchni Q , określonej np. parametrycznie równaniem

$$\vec{r}_Q = \vec{r}^0(\xi, \eta), \quad (93)$$

gdzie ξ i η oznaczają współrzędne na powierzchni Q (w ogólności krzywoliniowe). Aby warunki te przenieść na grunt optyki geometrycznej funkcję $u^0(\xi, \eta)$ należy rozwinąć na szereg Debye'a:

$$u^0(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m^0(\xi, \eta)}{(ik_0)^m} \exp(ik_0 \psi^0(\xi, \eta)). \quad (94)$$

Wobec tego warunki brzegowe dla eikonału i amplitud przyjmują postać:

$$\psi|_Q = \psi(\vec{r}_Q) = \psi^0(\xi, \eta), \quad A_m|_Q = A_m(\vec{r}_Q) = A_m^0(\xi, \eta). \quad (95)$$

4.1.1. Rozwiązania ogólne równań optyki geometrycznej

Rozwiązanie równania dla eikonału (pierwsze równanie w (92)) z warunkiem brzegowym (95) można zapisać w postaci

$$\psi(\vec{r}) = \psi^0(\xi, \eta) + \int_0^{\tau} n^2(\vec{r}(\tau')) d\tau', \quad (96)$$

gdzie całkowanie wykonuje się wzdłuż krzywej charakterystycznej równania eikonału. Tę krzywą charakterystyczną utożsamia się z trajektorią promienia (w sensie geometrycznym). Zmienna τ jest bieżącą zmienną wzdłuż promienia. Równania dla trajektorii promienia można zapisać w postaci hamiltonowskiej:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p} \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} n^2(\vec{r}) \end{cases} \quad (97)$$

gdzie

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{\nabla} \psi \\ \frac{d\psi}{d\tau} = \vec{p}^2 = n^2(\vec{r}) \end{cases} \quad (98)$$

Wielkość $\vec{p}$ nosi nazwę „pędu” promienia (promieniowego). Wektor ten jest styczny do trajektorii promienia i jednocześnie normalny do powierzchni stałego eikonu (stałej fazy). Z ostatnich równań wynikają warunki początkowe dla promieni:

$$\vec{p}^0|_Q = \vec{\nabla} \psi^0(\vec{r}^0(\xi, \eta)), \quad (99)$$

skąd wyznacza się dwie składowe początkowego „pędu” promienia wychodzącego z danego punktu $\vec{r}^0$. Trzecią składową wyznacza się z drugiego równania układu (98) (czyli równania eikonu), tzn.

$$(\vec{p}^0)^2 = n^2(\vec{r}^0). \quad (100)$$

Równanie to posiada zawsze dwa rozwiązania, które odpowiadają dwóm możliwym kierunkom propagacji wiązki falowej. Należy podkreślić, że rozwiązując powyższe równania otrzymujemy trajektorie promieni we współrzędnych promieniowych ξ, η i τ :

$$\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta, \tau). \quad (101)$$

Pozwala to prześledzić bieg promienia, jeżeli jest zadany jego punkt wyjścia z powierzchni Q . W większości przypadków jednak jest niezbędna znajomość promieni docierających do wybranego punktu obserwacyjnego, np. do detektora światła. W tym celu należy rozwiązać układ równań (101) względem współrzędnych promieniowych. Jest to tzw. zagadnienie odwrotne optyki geometrycznej. Na ogół równania (101) są równaniami nieliniowymi i ich rozwiązanie może nie być łatwe. Poza tym dla ustalonego punktu obserwacji równania te mogą mieć wiele rozwiązań. Wówczas wypadkowe pole w tym punkcie jest sumą pól pochodzących od wszystkich docierających do niego promieni. Należy pamiętać, że składowe pola są polami wektorowymi. Jeżeli posługujemy się skalarnym równaniem falowym, które nie zawiera informacji o stanie polaryzacji opisywanej wiązki falowej, to stan ten należy określić na podstawie innych rozważań.

Aby powyższe rozwiązania były kompletne, należy wyznaczyć jeszcze zmiany amplitud cząstkowych wzdłuż promienia. Odpowiednie wyrażenie dla zerowej amplitudy ma postać

$$A_0(\tau) = A_0(0) \left[\frac{D(0)}{D(\tau)} \right]^{1/2}, \quad (102)$$

gdzie

$$D(\tau) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \tau)} \quad (103)$$

jest jacobianem przejścia od zmiennych kartezjańskich (x, y, z) do zmiennych krzywoliniowych (ξ, η, τ) (równania (101)).

Fizycznie rzecz ujmując, warunek (102) wynika z zasady zachowania energii w tzw. rurce promieni.

Znane są również rozwiązania równań transportu wyższych rzędów, ale nie będą one w tej pracy wykorzystywane. Ponieważ obliczenie odpowiednich całek jest bardzo trudne, bardzo rzadko rozwiązuje się równania transportu wyższych rzędów. Konieczność taka występuje, gdy rozwiązania niższych rzędów nie zapewniają odpowiedniej dokładności.

4.1.2 Rachunek zaburzeń dla równania promieni

Jak widać, są znane ogólne postaci rozwiązań równań optyki geometrycznej, jednakże obliczenie odpowiednich całek w ogólnym przypadku może być bardzo trudne lub prowadzić do bardzo skomplikowanych wzorów. W tej sytuacji dużego znaczenia nabierają metody obliczeń przybliżonych. Jedną z powszechniej stosowanych metod jest rachunek zaburzeń, który można stosować, gdy

$$\varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon_0(\vec{r}) + v(\vec{r}) \Leftrightarrow n^2(\vec{r}) = n_0^2(\vec{r}) + v(\vec{r}), \quad (104)$$

przy czym musi zachodzić

$$|v(\vec{r})| \ll |\varepsilon_0(\vec{r})|. \quad (105)$$

Oznacza to, że składnik $v(\vec{r})$ przedstawia niewielkie zaburzenie w rozkładzie przenikalności elektrycznej ośrodka. Oczywiście, w rachunku zaburzeń zakłada się, że są znane równania promieni dla wiązki propagującej się w ośrodku o przenikalności elektrycznej $\varepsilon_0(\vec{r})$.

W tej sytuacji równania eikonału i promieni przyjmują postać

$$\begin{cases} (\vec{\nabla} \psi)^2 = n_0^2(\vec{r}) + v(\vec{r}) \\ \frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} n^2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} n_0^2(\vec{r}) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v(\vec{r}) \end{cases} \quad (106)$$

a ich rozwiązań poszukuje się w postaci

$$\vec{r}(\tau) = \vec{r}_0(\tau) + \vec{r}_1(\tau) + \vec{r}_2(\tau) + \dots \quad (107)$$

Tutaj $\vec{r}_0(\tau)$ przedstawia trajektorię promienia w ośrodku niezaburzonym, czyli rozwiązanie równania

$$\frac{d^2 \vec{r}_0}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} n_0^2(\vec{r}_0). \quad (108)$$

Pozostałe składniki w (107) przedstawiają pierwszą, drugą itd. poprawki do trajektorii promienia.

Ograniczając się do pierwszej poprawki możemy napisać:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = \frac{d^2 \vec{r}_0}{d\tau^2} + \frac{d^2 \vec{r}_1}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} n_0^2(\vec{r}_0 + \vec{r}_1) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v(\vec{r}_0 + \vec{r}_1). \quad (109)$$

Dokonując odpowiednich rozwinięć na szeregi w wyrażeniach po prawej stronie tej równości

$$\begin{cases} n_0^2(\vec{r}_0 + \vec{r}_1) = n_0^2(\vec{r}_0) + [\vec{\nabla} n_0^2(\vec{r}_0)] \circ \vec{r}_1 + \dots \\ v(\vec{r}_0 + \vec{r}_1) = v(\vec{r}_0) + [\vec{\nabla} v(\vec{r}_0)] \circ \vec{r}_1 + \dots \end{cases} \quad (110)$$

otrzymujemy ostatecznie równanie na pierwszą poprawkę do trajektorii promienia w postaci

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{d\tau^2} = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 \circ \vec{\nabla}) \vec{\nabla} n_0^2(\vec{r}_0) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v(\vec{r}_0). \quad (111)$$

Po rozwiązaniu tego równania wyznaczamy eikonał (por. (96)):

$$\psi(\vec{r}) = \psi^0(\xi, \eta) + \int_0^\tau [n_0^2(\vec{r}_0(\tau') + \vec{r}_1(\tau')) + v(\vec{r}_0(\tau') + \vec{r}_1(\tau'))] d\tau'. \quad (112)$$

Jak widać, całkowanie odbywa się wzdłuż poprawionego promienia. W prostszej wersji, gdy trajektoria promienia ulega zaniedbywalnym zmianom, można całkować wzdłuż niezaburzonego promienia. Jednakże ten sposób postępowania może nie zapewnić pożądanej dokładności rozwiązania.

Można również poszukiwać wyrażenia na eikonał w postaci szeregu

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r}) + \dots, \quad (113)$$

gdzie kolejne poprawki spełniają relacje:

$$|\psi_0(\vec{r})| \gg |\psi_1(\vec{r})| \gg |\psi_2(\vec{r})| \gg \dots \quad (114)$$

Uwzględniając w (113) rozwinięcie (107) możemy napisać:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \psi_0(\vec{r}_0) + (\vec{r}_1 \circ \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \psi_0(\vec{r}_0)) + \frac{1}{2}(\vec{r}_1 \circ \vec{\nabla})^2(\vec{\nabla} \psi_0(\vec{r}_0)) + \dots + \\ &\vec{\nabla} \psi_1(\vec{r}_0) + (\vec{r}_1 \circ \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \psi_1(\vec{r}_0)) + \dots + \\ &\vec{\nabla} \psi_2(\vec{r}_0) + \dots + \\ &\dots \end{aligned} \quad (115)$$

W powyższym rozwinięciu jawnie wypisano tylko składniki do drugiego rzędu włącznie. W tej sytuacji podstawiając to rozwinięcie do równania eikonálu (w układzie równań (92)), a także rozwinięcia (110), i przyrównując do siebie składniki o tej samej dokładności otrzymujemy równania na kolejne poprawki do eikonálu:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \psi_0(\vec{r}_0))^2 &= n_0^2(\vec{r}_0); \\ (\vec{\nabla} \psi_0(\vec{r}_0)) \cdot (\vec{\nabla} \psi_1(\vec{r}_0)) &= \frac{1}{2} \nu(\vec{r}_0); \\ (\vec{\nabla} \psi_0(\vec{r}_0)) \cdot (\vec{\nabla} \psi_2(\vec{r}_0)) &= -\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \psi_1(\vec{r}_0))^2; \end{aligned} \quad (116)$$

...

Pierwsze z tych równań przedstawia równanie eikonálu dla zagadnienia niezaburzonego (o którym zakładamy, że znamy jego rozwiązanie). Kolejne równania są równaniami na kolejne poprawki do niezaburzonego eikonálu. Korzystając z własności charakterystyk równania eikonálu, ich rozwiązania ogólne można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \psi_1(\vec{r}_0) &= \frac{1}{2} \int_0^\tau \nu(\vec{r}_0) d\tau'; \\ \psi_2(\vec{r}_0) &= -\frac{1}{2} \int_0^\tau (\vec{\nabla} \psi_1(\vec{r}_0))^2 d\tau'; \end{aligned} \quad (117)$$

...

Należy dodać, że najczęściej obliczenia ogranicza się do poprawek pierwszego rzędu, co daje:

$$\psi(\vec{r}) \approx \psi_0(\vec{r}_0) + (\vec{r}_1 \circ \vec{\nabla})(\psi_0(\vec{r}_0)) + \psi_1(\vec{r}_0) + \dots, \quad (118)$$

Po wyznaczeniu trajektorii promieni wyznaczamy amplitudę fali obliczając jacobian z odpowiednią dokładnością (por. (102) i (103)):

$$A_0(\tau) = A_0(0) \left[\frac{D(0)}{D(\tau)} \right]^{1/2}, \quad D(\tau) = \frac{\partial(\vec{r}_0 + \vec{r}_1 + \dots)}{\partial(\xi, \eta, \tau)}. \quad (119)$$

Podstawiając otrzymane wyrażenia do (90) otrzymujemy ostateczną postać rozkładu amplitudy w analizowanej wiązce monochromatycznej.

Szczególnie prostą sytuację mamy wówczas, gdy rachunek zaburzeń stosujemy do niewielkich zmian współczynnika załamania światła w ośrodku jednorodnym, tzn. gdy

$$n_0(\vec{r}_0) = n_0 = \text{const}. \quad (120)$$

Pierwszą poprawkę do trajektorii promienia przedstawia wzór (por. wzór (111)):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1^0 + \vec{p}_1^0 \tau + \int_0^\tau (\tau - \tau') \vec{F}_1(\tau') d\tau', \quad (121)$$

gdzie $\vec{r}_1^0$ i $\vec{p}_1^0$ wyznacza się z warunków brzegowych dla wiązki zaburzonej oraz

$$\vec{F}_1(\tau) = \frac{1}{2} \vec{\nabla} v(\vec{r}_0(\tau)). \quad (122)$$

Natomiast eikonał zaburzonej fali opisuje wyrażenie:

$$\psi(\vec{r}) \approx \psi^0(\xi, \eta) + n_0^2 \tau + \int_0^\tau v(\vec{r}_0 + \vec{r}_1) d\tau'. \quad (123)$$

Należy pamiętać, że poprawkę do eikonálu wiązki przedstawia nie tylko występująca w ostatnim wzorze całka, ale także współrzędna bieżąca promienia τ zmieniająca się na skutek zmiany trajektorii promienia.

4.1.4

Opis propagacji wiązki gaussowskiej w ośrodku jednorodnym

Jak już podano w rozdziale 3., charakterystycznym miejscem wiązki gaussowskiej jest tzw. przewężenie, w którym fala świetlna ma charakter fali płaskiej, a rozkład amplitudy tej fali opisuje funkcja Gaussa. Przyjmując, że przewężenie to znajduje się w płaszczyźnie $z = 0$, co oznacza, że wiązka propaguje się równolegle do osi OZ,

możemy płaszczyznę tę przyjąć za powierzchnię Q , na której zadaje się warunki brzegowe. W tej sytuacji możemy napisać:

W kolejnych wzorach
zamiast a w publikacji
podstawiamy b_0

$$u_0(x, y) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2b_0^2}\right), \quad (124)$$

gdzie E_0 jest natężeniem pola elektrycznego w środku wiązki, natomiast b_0 oznacza natężeniowy promień wiązki. Na płaszczyźnie Q , czyli na płaszczyźnie $z = 0$, najprościej wybrać kartezjański układ współrzędnych, w którym współrzędne ξ i η pokrywają się ze współrzędnymi x i y układu wiązki. Przyjmując współrzędne punktu wyjścia promienia z płaszczyzny $z = 0$ w postaci

$$\vec{r}^0 = [\xi, \eta] \quad (125)$$

możemy przedstawić funkcję (124) w postaci Debye'a następująco:

$$u_0(\xi, \eta) = E_0 \exp\left[ik_0 \frac{i(\xi^2 + \eta^2)}{2k_0 b_0^2}\right]. \quad (126)$$

Przy takim przedstawieniu brzegowego rozkładu pola elektrycznego w wiązce wyrażenie na jej brzegowy eikonał oraz brzegową wartość amplitudy zerowego rzędu mają postać:

$$\psi^0(\xi, \eta) = i \frac{\xi^2 + \eta^2}{2k_0 b_0^2}, \quad A_0(0) = E_0. \quad (127)$$

Jak widać, w tym przypadku eikonał jest funkcją liczby falowej k_0 .

Możemy teraz wyznaczyć dwie składowe początkowego „pędu” promienia na płaszczyźnie $z = 0$:

$$\vec{p}^0 = \vec{\nabla} \psi^0, \Leftrightarrow \begin{cases} p_x^0 = \frac{i\xi}{k_0 b_0^2} \\ p_y^0 = \frac{i\eta}{k_0 b_0^2} \end{cases}. \quad (128)$$

Trzecią składową początkowego „pędu” promienia w ośrodku jednorodnym o współczynniku załamania n_0 wyznaczamy z równania (por. równanie (100)):

$$(\vec{p}^0)^2 = (p_x^0)^2 + (p_y^0)^2 + (p_z^0)^2 = n_0^2, \quad (129)$$

co daje

$$p_z^0 = \pm n_0 \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{z_R^2}}. \quad (130)$$

We wzorach od 130
do 139 podstawiamy
długości Rayleigha $z_R = k_0 b_0^2 n_0$

Tutaj $z_R = k_0 b_0^2 n_0$ jest długością Rayleigha (por. (3)). Znak dobiera się w zależności od kierunku propagacji wiązki – w dalszych obliczeniach przyjęto, że fala propaguje się w dodatnim kierunku osi OZ (znak +).

W tej sytuacji rozwiązania równań (97) są następujące:

$$\vec{p} = \vec{p}^0 = \text{const}, \quad (131)$$

oraz

$$\vec{r} = \vec{r}^0 + \vec{q}^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(\tau) = \xi \left(1 + \frac{i n_0}{z_R} \tau \right) \\ y(\tau) = \eta \left(1 + \frac{i n_0}{z_R} \tau \right) \\ z(\tau) = n_0 \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{z_R^2}} \end{cases}. \quad (132)$$

Scałkowanie równania dla eikonu (96) również nie nastręcza trudności. Otrzymujemy (por. (123)):

$$\psi(\tau) = \psi^0 + n_0^2 \tau, \quad \psi^0 = i n_0 \frac{\xi^2 + \eta^2}{2 z_R}. \quad (133)$$

Do kompletu należy jeszcze określić zmianę amplitudy fali wzdłuż promienia. W tym celu należy obliczyć jacobian przejścia od zmiennych (x, y, z) do zmiennych (ξ, η, τ) . Odpowiednie pochodne wynoszą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} = 1 + i \frac{n_0}{z_R} \tau, \quad \frac{\partial x}{\partial \tau} = i \xi \frac{n_0}{z_R}, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} = i \eta \frac{n_0}{z_R}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{n_0 \tau \xi}{z_R^2 \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{z_R^2}}}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{n_0 \tau \eta}{z_R^2 \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{z_R^2}}}, \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} = n_0 \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{z_R^2}}. \end{aligned} \quad (134)$$