Janusz Pawlikowski
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski
pl. Grunwaldzki 2/4
50-384 Wrocław
Janusz.Pawlikowski@math.uni.wroc.pl

Wrocław, 15.11.2012

Recenzja w postępowaniu o nadanie

stopnia doktora habilitowanego

doktorowi Piotrowi Szucy

Przedstawiony do oceny jako Rozprawa Habilitacyjna cykl pięciu prac dotyczy zastosowań zbieżności ideałowej ciągów liczb rzeczywistych.

Zbieżność ideałowa jest uogólnieniem zwykłej zbieżności: ciąg liczb rzeczywistych (x_n) zbiega do liczby rzeczywistej x w sensie ideału $\mathcal{I}$ podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór E w ideale $\mathcal{I}$ taki, że

$$n \in \mathbb{N} \setminus E \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon.$$

Pojęcie to jest dobrze ugruntowane i badane w analizie rzeczywistej od ponad osiemdziesięciu lat.

Omówię teraz istotniejsze rezultaty zawarte w Rozprawie Habilitacyjnej.

W pracy [1] (numeracja tak jak w Autoreferacie) autorzy podają m.in. częściową odpowiedź na pytanie Hrušáka o to, czy dla ideałów Borelowskich pewna naturalna ideałowa wersja twierdzenia Bolzano-Weierstrassa ($FinBW$) jest równoważna możliwości rozszerzenia ideału do ideału typu F_σ. Pokazują mianowicie, że dla p-ideału analitycznego rozszerzalność do ideału typu F_σ jest równoważna $FinBW$.

Prominentną rolę w dowodzie odgrywa znana charakteryzacja Soleckiego p-ideałów analitycznych w języku dolnie półciągłych podmiar.

Zgodnie z oświadczeniami współautorów powyższy interesujący rezultat należy do dra Szucy.

W pracy [2] autorzy prezentują m.in. rozwiązania dwóch problemów Drewnowskiego i Łuczaka. Pokazują mianowicie, że: (1) dla submiar znikających na singletonach pewne techniczne warunki (A) i (B) (zob. str. 4 autoreferatu) są równoważne, natomiast ogólnie warunek (A) jest silniejszy; (2) istnieje podmiara spełniająca warunek (A), która nie jest granicą górną podmiar dolnie półciągłych. Oba rezultaty znacząco powiększają naszą wiedzę o podmiarach na $\mathbb{N}$.

Zgodnie z oświadczeniem współautora, pierwszy wynik należy do dra Szucy, a w drugim ma on 1/2 udziału.

W pracy [3] autorzy badają uogólnienia gęstościowych uogólnień twierdzenia Schura. Standardowe twierdzenie Schura mówi, że dla dowolnego pokolorowania $\mathbb{N}$ skończenie wieloma kolorami istnieje kolor c i dwie liczby x i y koloru c, których suma $x+y$ jest też koloru c. Gęstościowe uogólnienie Franka, Grahama i Rödla zapewnia, że takich par liczb (x, y) jest dużo w sensie potęgi Fubiniego górnej asymptotycznej gęstości. Inne gęstościowe uogólnienie twierdzenia Schura podane przez Bergelsona (zob. str. 5 Autoreferatu, Twierdzenie 3) podaje precyzyjniejsze szacowanie liczby par (x, y). Autorzy pokazują, jak zastąpić górną asymptotyczną gęstość dowolną niezmienniczą na przesunięcia podmiarą mającą postać $\lim_n \phi(A \cap [n, \infty))$, gdzie ϕ jest podmiarą; w drugim uogólnieniu wymagany jest dodatkowo pewien techniczny warunek $\triangle$.

Z oświadczenia współautora wynika, że drugi rezultat jest samodzielnym wynikiem dra Szucy, a w pierwszym udział dra Szucy wynosi 1/2.

W pracy [4] autorzy pokazują m.in., że dla ideałów analitycznych, jeśli hierarchia Baire'a funkcji, w której wykorzystuje się zbieżność ideałową, zgadza sie ze zwykłą hierarchią Baire'a na pierwszym kroku, to zgadza się zawsze. Wynik ten stanowi uogólnienie analogicznego twierdzenia Laczkovicha i Recławа, które mówiło jedynie o ideałach borelowskich i skończonych klasach Baire'a. Ponadto autorzy uogólniają z przestrzeni polskich na przestrzenie doskonale normalne podaną przez Laczkovicha i Recława charakteryzacje, że dla ideałów borelowskich funkcje pierwszej klasy Baire'a w sensie zbieżności ideałowej są pierwszej klasy w zwykłym sensie dokładnie wtedy, gdy ideał od filtru dualnego oddziela się zbiorem klasy F_σ.

Podobnie jak wyżej, z oświadczenia współautora wynika, że drugi rezultat jest samodzielnym wynikiem dra Szucy, a w pierwszym udzial dra Szucy wynosi 1/2.

Ostatnia praca [5], zawiera rozszerzenie charakteryzacji Brucknera i Cedara tych funkcji ciągłych $f : [0,1] \to [0.1]$, dla których funkcja ω_f przypisująca każdemu punktowi $x \in [0,1]$ zbiór punktów skupienia ciągu iteracji $(f^n(x))$ jest funkcją ciagłą z $[0,1]$ w hiperprzestrzeń podzbiorów zwartych $[0,1]$. Do długiej listy podanej przez Brucknera i Cedara dr Szuca dodaje warunki, w których wykorzystywana jest zbieżność ideałowa.

Ostatnia praca jest samodzielna.

Ogólnie mam wrażenie, że rezultaty przedstawione przez dra Szucę w Rozprawie Habilitacyjnej są interesujące, znacznie powiększają naszą wiedzę, a ich dowody często są nietrywialne. Mimo, że większość rezultatów to wyniki wspólne, udział w nich dra Szucy jest istotny. Warto zaznaczyć, że prace opublikowane są w bardzo dobrych czasopismach: *Journal of Symbolic Logic*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Journal of Combinatorial Theory Ser. A* i *Central European Journal of Mathematics*.

W pozostałym dorobku uwagę przykuwają następujące prace:

Praca [9], w której dr Szuca pokazuje, że w charakteryzacji Szarkowskiego zbiorów okresów zasadniczych można założenie ciągłości funkcji osłabić do żądania by wykres był spójnym zbiorem typu G_δ. Jest to rozwiązanie problemu Kelluma.

Praca [16], gdzie dowodzi się ideałowej wersji twierdzenia Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych. Mianowicie, ideał nie rozszerza sie do ideału sumowalnego dokładnie wtedy, gdy dla każdego szeregu warunkowo zbieżnego, permutując wyrazy szeregu na zbiorze z ideału można otrzymać zbieżność do dowolnego $r \in [-\infty, +\infty]$. Wynik ten stanowi rozwiązanie problemu Wilczyńskiego.

Praca [19], gdzie rozważa się ideałowe wersje twierdzenia Ramsey'a, twierdzenia Bolzano-Weierstrassa i twierdzenia o ciągu monotonicznym. Autorzy pokazują, że w pewnym sensie wszystkie te wersje wyznaczają jedną klasę ideałów.

Prace te też są opublikowane w dobrych czasopismach: *Fundamenta Mathematicae*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* i *Czechoslovak Mathematical Journal*.

Reasumując, dr Szuca jest dojrzałym matematykiem, ma znaczne osiągnięcia w wybranej przez siebie specjalizacji, potrafi dowodzić i prezentować nietrywialne twierdzenia i umie pracować zespołowo. Uważam, że spełnione są wszystkie ustawowe wymagania i wnoszę o nadanie doktorowi Szucy stopnia doktora habilitowanego.

Paweł Kowsl