

AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: **Piotr Szuca**

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe:

- dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki i Fizyki, 2000;
- stopień doktora matematyki, Uniwersytet Gdański, Wydział Matematyki Fizyki i Informatyki, 2004.

3. Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- stanowisko asystenta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego w latach 2002–2004;
- stanowisko adiunkta w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego od roku 2004.

4. Osiągnięcie wynikające z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi jednotematyczny cykl publikacji pod tytułem:

„Zbieżność ideałowa ciągów i jej zastosowania w teorii funkcji rzeczywistych i kombinatoryce”.

Lista publikacji wchodzących w skład ww. osiągnięcia:

- [1] Rafał Filipów, Nikodem Mrozek, Ireneusz Reclaw, P. Szuca, Ideal convergence of bounded sequences, *J. Symbolic Logic*, 72(2): 501–512, 2007.
- [2] Rafał Filipów, P. Szuca, On some questions of Drewnowski and Łuczak concerning submeasures on $\mathbb{N}$, *J. Math. Anal. Appl.*, 371(2): 655–660, 2010.
- [3] Rafał Filipów, P. Szuca, Density versions of Schur’s theorem for ideals generated by submeasures, *J. Combin. Theory Ser. A*, 117(7): 943–956, 2010.
- [4] Rafał Filipów, P. Szuca, Three kinds of convergence and the associated $\mathcal{I}$ -Baire classes, *J. Math. Anal. Appl.*, 391(1): 1–9, 2012.
- [5] P. Szuca, $\mathcal{F}$ -limit points in dynamical systems defined on the interval, *Cent. Eur. J. Math.*, 2012. doi:10.2478/s11533-012-0056-0

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

Pojęcie zbieżności filtrowej ciągu jest uogólnieniem pojęcia klasycznej zbieżności ciągu. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Cartana w 1937 roku ([Car37]) i od ukazania się w 1940 roku książki Bourbaki ([Bou40]) stało się ważnym narzędziem używanym w topologii ogólnej i analizie funkcjonalnej. W wielu współczesnych pracach używana jest dualna notacja

zbieżności ideałowej (np. w często cytowanej pracy [KŚW01]) i takiej terminologii będę używał w tym referacie.

PODSTAWOWE OZNACZENIA I DEFINICJE

Idealem na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$ będę nazywał dalej dowolną rodzinę podzbiorów $\mathbb{N}$ zamkniętą ze względu na operacje wykonywania skończonych sum i brania podzbiorów. Czasami zamiast ideałów na zbiorze $\mathbb{N}$ będę rozpatrywał ideały na innym zbiorze przeliczalnym, np. na zbiorze liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Będę mówił, że ideał $\mathcal{I}$ jest *właściwy*, jeżeli $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$. Używając w tym referacie słowa „ideał” będę zakładał, że jest to ideał właściwy. Ideały będę oznaczał symbolami

$\mathcal{I}, \mathcal{J}$. Symbolem $\mathcal{I}^*$ będę oznaczał filtr dualny do $\mathcal{I}$, tj. zbiór $\{\mathbb{N} \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$. Symbolem Fin będę oznaczał ideał wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$.

Ideał $\mathcal{I}$ będę nazywał *P-ideałem*, jeżeli dla dowolnego ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiorów należących do $\mathcal{I}$ można wskazać zbiór $A \in \mathcal{I}$ taki, że $A_n \setminus A$ jest skończony dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Utożsamiając podzbiory z ich funkcjami charakterystycznymi można rozpatrywać rodzinę $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jako zbiór homeomorficzny ze zbiorem Cantora. Możemy więc mówić, że ideał $\mathcal{I}$ jest typu F_σ (odpowiednio, $\mathcal{I}$ jest analityczny) jeżeli $\mathcal{I}$ jest podzbiorem typu F_σ zbioru Cantora (odpowiednio, jeżeli $\mathcal{I}$ jest ciągłym obrazem zbioru typu G_δ w przestrzeni polskiej).

Funkcję $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ będę nazywał *podmiarą*, jeżeli $\phi(\emptyset) = 0$, ϕ jest monotoniczna (tj. $\phi(A) \leq \phi(B)$ o ile $A \subset B$) oraz ϕ jest podaddytywna (tj. $\phi(A \cup B) \leq \phi(A) + \phi(B)$). Będę również zakładał, że $\phi(\mathbb{N}) > 0$.

Podmiara ϕ jest *dolnie półciągła* (dalej: *lsc*), jeżeli $\phi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A \cap \{0, 1, \dots, n\})$ dla każdego $A \subset \mathbb{N}$. Jeżeli ϕ jest podmiarą lsc, to symbolem „ $\|\cdot\|_\phi$ ” będę oznaczał podmiarę zdefiniowaną następująco:

$$\|A\|_\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A \cap \{n, n+1, n+2, \dots\}), \text{ dla dowolnego } A \subset \mathbb{N}.$$

Mazur i Solecki podali charakteryzacje ideałów typu F_σ oraz P-ideałów analitycznych w języku dolnie półciągłych podmiar określonych na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych:

1. ideał $\mathcal{I}$ jest typu F_σ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dolnie półciągła podmiara ϕ taka, że $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{N} : \phi(A) < \infty\}$ ([Maz91]);
2. ideał $\mathcal{I}$ jest P-ideałem analitycznym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dolnie półciągła podmiara ϕ taka, że $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{N} : \|A\|_\phi = 0\}$ ([Sol99]).

Dalej symbolem $\text{Exh}(\phi)$ będę oznaczał rodzinę zbiorów: $\{A \subset \mathbb{N} : \|A\|_\phi = 0\}$. Zgodnie ze wspomnianym powyżej twierdzeniem Soleckiego, ideał $\mathcal{I}$ jest P-ideałem analitycznym wtedy i tylko wtedy, gdy można go zapisać w formie $\mathcal{I} = \text{Exh}(\phi)$ dla pewnej podmiary lsc.

ZBIEŻNOŚĆ IDEAŁOWA NA DUŻYM ZBIORZE

Niech $x_n \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Mówimy, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest $\mathcal{I}$ -zbieżny do liczby rzeczywistej x jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \{n \in \mathbb{N} : |x - x_n| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}.$$

Na oznaczenie takiej zbieżności będę używał notacji:

$$x = \mathcal{I} - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n,$$

lub, jeżeli zbieżność odbywa się na zbiorze $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{I}$:

$$x = \mathcal{I} - \lim_{n \in A} x_n.$$

Jeżeli $\mathcal{I} = \text{Fin}$, to $\mathcal{I}$ -zbieżność ciągu jest równoważna klasycznej zbieżności. Wiadomo też, że jeżeli $\mathcal{I}$ jest P-ideałem, to $\mathcal{I}$ -zbieżność jest równoważna klasycznej zbieżności na zbiorze z filtra dualnego do $\mathcal{I}$ ([KŚW01]).

W pracy [1] rozważaliśmy pytanie o $\mathcal{I}$ -zbieżność $\mathcal{I}$ -podciągów ciągu liczb rzeczywistych. Przez $\mathcal{I}$ -podciąg ciągu $(x_n)_n$ będę rozumiał funkcję $(x_n)_n \upharpoonright A$, dla pewnego $A \notin \mathcal{I}$. Mówimy, że ideał ma *własność Bolzano-Weierstrassa* (w skrócie: *własność BW*), jeżeli dla dowolnego ciągu ograniczonego istnieje jego $\mathcal{I}$ -podciąg $\mathcal{I}$ -zbieżny. Analogicznie, ideał ma *skończoną własność Bolzano-Weierstrassa* (w skrócie: *własność FinBW*), jeżeli dla dowolnego ciągu ograniczonego istnieje zbiór $A \notin \mathcal{I}$ taki, że ciąg ten po obcięciu do zbioru A jest zbieżny (w klasycznym sensie). Dla P-ideałów własności BW i FinBW są równoważne.

Podaliśmy przykłady ideałów które mają, oraz ideałów które nie mają własności BW (FinBW). Scharakteryzowaliśmy tę własność:

- w języku rodzin rozcinających: *ideał $\mathcal{I}$ nie ma własności Bolzano-Weierstrassa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina przeliczalna rozcinająca algebrę Boole'a $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathcal{I}$;*
- w podklasie P-ideałów analitycznych: *P-ideał analityczny ma własność BW (FinBW) wtedy i tylko wtedy, gdy można go rozszerzyć do ideału właściwego typu F_σ .*

Przy założeniu Hipotezy Continuum, w drugiej z przedstawionych powyżej charakteryzacji warunków rozszerzalności do ideału właściwego typu F_σ może zostać zastąpiony przez rozszerzalność do P-ideału maksymalnego¹.

Niech $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ będą ideałami na zbiorach przeliczalnych. Będę pisał, że $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ jeżeli istnieje funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ dla każdego $A \in \mathcal{I}$. Relacja „ $\leq_K$ ” jest relacją quasi-porządku, którą będę dalej nazywał, zgodnie z tradycją, *porządkiem Katětova*². W swoim doktoracie [MA09] Meza-Alcántara pokazał, że własność FinBW ideału $\mathcal{J}$ jest równoważna następującemu warunkowi:

$$\text{conv} \not\leq_K \mathcal{J},$$

gdzie ideał conv jest rodziną tych podzbiorów zbioru $\mathbb{Q}$, które mają skończenie wiele punktów skupienia.

Hrušák sformułował pytanie, czy dla ideałów borelowskich własność FinBW jest równoważna rozszerzalności do ideału typu F_σ ([Hru11, Q. 5.16])³. Z charakteryzacji przedstawionej w pracy [1] wynika, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca w klasie wszystkich P-ideałów analitycznych (o ile mi wiadomo, pytanie Hrušáka w ogólnym sformułowaniu pozostaje nadal otwarte).

Będę mówił, że podmiara ϕ jest *nieatomowa*, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje partycja zbioru $\mathbb{N}$ na skończenie wiele zbiorów $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ taka, że $\phi(A_i) \leq \varepsilon$ dla każdego $i = 0, 1, \dots, n-1$. Własność ta była rozpatrywana np. w pracach [DP00], [DL08] (do pracy [DL08] odniosę się jeszcze w następnym rozdziale). W pracy [1] udowodniliśmy następującą charakteryzację własności BW dla P-ideałów analitycznych.

Twierdzenie 1. *Niech $\mathcal{I} = \text{Exh}(\phi)$ będzie P-ideałem analitycznym. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. $\mathcal{I}$ nie ma własności Bolzano-Weierstrassa;
2. podmiara $\|\cdot\|_\phi$ jest nieatomowa.

KOMBINATORYCZNE WŁASNOŚCI IDEAŁÓW GENEROWANYCH PRZEZ PODMIARY

Będziemy mówili, że podmiara ϕ jest *zdominowana* przez podmiarę ψ jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $\phi(A) < \varepsilon$ o ile $\psi(A) < \delta$. Będziemy mówili, że ϕ i ψ są *równoważne* jeżeli ϕ jest zdominowana przez ψ oraz ψ jest zdominowana przez ϕ . Wiadomo, że jeżeli podmiary ϕ i ψ są równoważne, to $\text{Exh}(\phi) = \text{Exh}(\psi)$.

W pracy [DL08] autorzy rozważali problemy związane z dominowaniem podmiar. W szczególności, interesowała ich odpowiedź na pytanie, czy jeżeli $\text{Exh}(\phi) \subset \text{Exh}(\psi)$ i $\text{Exh}(\phi)$ jest podmiarą nieatomową, to $\text{Exh}(\psi)$ również jest nieatomowa. Odpowiadając twierdząco na to pytanie sformułowaliśmy następujące warunki (A), (B) i (C).

Dla ustalonej podmiary ϕ , ciąg $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ będę nazywał *ϕ -ciągami*⁴, jeżeli

$$\phi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = 0 \text{ dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych } F_n \subset A_n \text{ (} n \in \mathbb{N} \text{)}.$$

¹W literaturze w tym kontekście częściej używa się dualnego pojęcia ultrafiltru. Zbiór wszystkich ultrafiltrów określonych na zbiorze $\mathbb{N}$ z odpowiednio zdefiniowaną topologią stanowi uzwarcenie Čecha-Stone'a zbioru liczb naturalnych. Pojęcie P-ideału maksymalnego jest pojęciem dualnym do pojęcia P-punktu w uzwarceniu Čecha-Stone'a zbioru liczb naturalnych.

²Podana definicja została wprowadzona przez Katětova w pracach [Kat68] i [Kat72] w celu badania filtrowej zbieżności ciągów funkcyjnych.

³Hrušák w swojej pracy używa równoważnej definicji własności BW sformułowanej przy użyciu porządku Katětova. Oryginalne pytanie brzmiało, czy dla ideału borelowskiego $\mathcal{J}$ następujące warunki są równoważne: (i) $\text{conv} \not\leq_K \mathcal{J}$; (ii) $\mathcal{J}$ może zostać rozszerzony do ideału właściwego typu F_σ ?

⁴Definicję ϕ -ciągu sformułowaliśmy w pracy [2] aby ujednolicić i skrócić zapis warunków (A), (B) i (C) zastosowany oryginalnie w pracy [DL08].

Będę mówił, że ϕ spełnia *warunek*

- (A): jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A_n) = 0$ dla każdego ϕ -ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
- (B): jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A_n) = 0$ dla każdego zstępującego ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takiego, że nie istnieje zbiór $Z \subset \mathbb{N}$ taki, że $\phi(Z) > 0$ i $Z \setminus A_n$ jest skończony dla każdego $n \in \mathbb{N}$;
- (C): jeżeli dla każdego ciągu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(A_n) = 0$ istnieje podciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ oraz zbiory skończone $E_{n_k} \subset A_{n_k}$ takie, że $(A_{n_k} \setminus E_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ jest ϕ -ciągiem.

W artykule [DŁ08] autorzy zauważyli, że warunek (A) implikuje warunek (B); że granica górna ciągu podmiar lsc spełnia warunek (A); oraz że dla dowolnej przeliczalnie podaddytywnej podmiary ϕ podmiara $\|\cdot\|_\phi$ spełnia warunek (C). Sformułowali pytania:

- Czy warunek (A) jest silniejszy od warunku (B)?
- Czy istnieje podmiara z własnością (A), która nie jest równoważna podmierze będącej granicą górną ciągu podmiar lsc?
- Czy istnieje podmiara z własnością (C), która nie jest równoważna żadnej podmierze $\|\cdot\|_\phi$ dla przeliczalnie podaddytywnej ϕ ?

W pracy [2] rozwiązaliśmy powyższe problemy. Pokazaliśmy, że dla dowolnej podmiary znikającej na punktach warunek (A) jest równoważny warunkowi (B). Zauważyliśmy także, że dla pewnego ideału $\mathcal{I}$ rozpatrywanego wcześniej w literaturze (tzw. ideału Matthiasa [Mat77]) podmiara zero-jedynkowa zdefiniowana wzorem:

$$\phi_{\mathcal{I}}(A) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } A \in \mathcal{I}; \\ 1 & \text{jeżeli } A \notin \mathcal{I}, \end{cases}$$

spełnia warunek (A), ale nie jest równoważna podmierze będącej granicą górną ciągu podmiar lsc. Pokazaliśmy również, że jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem dualnym do ultrafiltru selektywnego (istnienie takich ultrafiltrów jest niezależne od aksjomatów ZFC), to $\phi_{\mathcal{I}}$ spełnia warunek (C), ale nie jest równoważna żadnej podmierze $\|\cdot\|_\phi$ dla przeliczalnie podaddytywnej podmiary ϕ .

Podmiary zero-jedynkowe nie mogą być nieatomowe. O ile mi wiadomo, to odpowiedź na drugie i trzecie pytanie w podklasie podmiar nieatomowych jest nieznana.

GĘSTOŚCIOWE WERSJE TWIERDZEŃ KOMBINATORYCZNYCH

Twierdzenie Schura mówi, że dla dowolnej partycji zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N} = C_0 \cup \dots \cup C_{r-1}$, istnieją liczby x, y, z takie, że $x, y, z \in C_i$ dla pewnego $i < r$ oraz $x + y = z$. (Dalej, zgodnie z tradycją, zamiast słowa „partycja” będę używał słowa „pokolorowanie”).

Twierdzenie to ma wiele uogólnień. Frankl, Graham i Rödl ([FGR90]) podali gęstościową wersję twierdzenia dla podmiary $\bar{d}$ — nazywanej *górną asymptotyczną gęstością* — zdefiniowanej wzorem:

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap \{0, 1, \dots, n-1\})}{n}.$$

Twierdzenie 2 ([FGR90]). *Dla dowolnego pokolorowania $\mathbb{N} = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{r-1}$ istnieje $\delta = \delta(r) > 0$ oraz $i < r$ takie, że*

$$\bar{d}(\{x \in \mathbb{N} : \bar{d}(\{y \in \mathbb{N} : x, y, x + y \in C_i\}) \geq \delta\}) \geq \delta.$$

O podmierze ϕ będę mówił, że jest *niezmiennicza ze względu na przesunięcia*, jeżeli $\phi(A+t) = \phi(A)$ dla każdego $A \subset \mathbb{N}$ i $t \in \mathbb{N}$ (gdzie $A+t = \{a+t : a \in A\}$). W pracy [3] pokazaliśmy, że w Twierdzeniu 2 zamiast górnej asymptotycznej gęstości $\bar{d}$ można wstawić dowolną podmiarę postaci $\|\cdot\|_\phi$, o ile tylko $\|\cdot\|_\phi$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia (w szczególności, $\bar{d}$ również jest tej postaci).

Zarówno w Twierdzeniu 2, jak i w naszym uogólnieniu, stała δ w tezie twierdzenia zależy od liczby kolorów r . W omawianym artykule udowodniliśmy także, że ideał $\text{Exh}(\phi)$ taki, że $\|\cdot\|_\phi$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia ma własność Bolzano-Weierstrassa wtedy i tylko wtedy, gdy w omawianym uogólnieniu stałą δ można dobrać niezależnie od liczby użytych kolorów r .

W literaturze często rozważane są ideały typu Erdősa-Ulama ([JK84]). Są to ideały postaci $\text{Exh}(\mathcal{EU}_f)$, gdzie

$$\mathcal{EU}_f(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i \in A, i < n} f(i)}{\sum_{i < n} f(i)},$$

dla funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$ spełniającej warunki

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i) = +\infty \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{\sum_{i < n} f(i)} = 0.$$

Sprawdziliśmy, że jeżeli funkcja f jest monotoniczna, to podmiara $\|\cdot\|_{\mathcal{EU}_f}$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia (zarówno górna asymptotyczna gęstość jak i — znana z literatury — górna logarytmiczna gęstość, są podmiarami postaci $\|\cdot\|_{\mathcal{EU}_f}$ dla pewnej monotonicznej funkcji f). Wcześniej udowodniliśmy, że żaden ideał Erdősa-Ulama nie ma własności Bolzano-Weierstrassa ([1]).

Innym gęstościowym uogólnieniem twierdzenia Schura jest następująca wersja udowodniona przez Bergelsona.

Twierdzenie 3 ([Ber86]). *Dla dowolnego pokolorowania $\mathbb{N} = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{r-1}$ istnieje $i < r$ takie, że $\bar{d}(C_i) > 0$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$,*

$$\bar{d}\left(\left\{x \in \mathbb{N} : \bar{d}(\{y \in \mathbb{N} : x, y, x+y \in C_i\}) \geq \bar{d}(C_i)^2 - \varepsilon\right\}\right) > 0.$$

W pracy [3] wprowadziliśmy następującą własność podmiar lsc: dolnie półciągła podmiara ϕ spełnia warunek Δ jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{N}$ i $N \in \mathbb{N}$ istnieje skończenie addytywna miara $\phi' \leq \phi$ taka, że $\phi' \leq 1$ oraz

$$\phi'(A+t) \geq \|A\|_\phi - \varepsilon \text{ dla każdego } t \in [-N, N] \text{ (gdzie } A+t = \{a+t : a \in A\} \cap \mathbb{N}).$$

Sprawdziliśmy, że wszystkie podmiary $\mathcal{EU}_f$ generowane przez monotoniczną funkcję f (w szczególności, górna asymptotyczna gęstość i górna logarytmiczna gęstość) spełniają warunek Δ — jak zauważyłem wcześniej, dla takich f podmiara $\|\cdot\|_{\mathcal{EU}_f}$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Udowodniliśmy następujące twierdzenie uogólniające wspomniany wynik Bergelsona.

Twierdzenie 4. *Jeżeli ϕ ma własność Δ oraz podmiara $\|\cdot\|_\phi$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, to dla dowolnego pokolorowania $\mathbb{N} = C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_{r-1}$ istnieje $i < r$ takie, że $\|C_i\|_\phi > 0$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$,*

$$\left\|\left\{x \in \mathbb{N} : \|\{y \in \mathbb{N} : x, y, x+y \in C_i\}\|_\phi \geq \|C_i\|_\phi^2 - \varepsilon\right\}\right\|_\phi > 0.$$

W celu udowodnienia powyższego twierdzenia musieliśmy sprawdzić, że prawdziwa jest przytoczona poniżej podmiarowa wersja twierdzenia Chinczyna o powracaniu.

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że $\phi \in \Delta$, $\varepsilon > 0$, $A \subset \mathbb{N}$ oraz $n_k \in \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$). Wówczas*

$$\phi((A+n_i) \cap (A+n_j)) \geq \|A\|_\phi^2 - \varepsilon$$

dla pewnych $i, j \leq K$ (gdzie $K = K(\|A\|_\phi, \varepsilon)$ zależy jedynie od wartości $\|A\|_\phi$ oraz ε .)

Niech X będzie przestrzenią topologiczną a α niech będzie przeliczalną liczbą porządkową. Symbolem $\mathcal{B}_\alpha(X)$ będę oznaczał α -tą klasę Baire'a, zdefiniowaną następująco:

- $\mathcal{B}_0(X) = \mathcal{C}(X)$;
- $\mathcal{B}_\alpha(X) = \text{LIM} \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta(X) \right)$, dla $\alpha > 0$,

gdzie $\mathcal{C}(X)$ jest rodziną wszystkich funkcji rzeczywistych ciągłych określonych na przestrzeni topologicznej X , a, dla dowolnej rodziny $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^X$ funkcji rzeczywistych określonych na przestrzeni X , $\text{LIM}(\mathcal{E})$ jest rodziną wszystkich granic punktowo zbieżnych ciągów funkcji należących do rodziny $\mathcal{E}$.

Analogicznie do powyższej definicji można zdefiniować klasy $\mathcal{I}$ -Baire'a:

- $\mathcal{B}_0^{\mathcal{I}}(X) = \mathcal{C}(X)$;
- $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(X) = \mathcal{I} - \text{LIM} \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta^{\mathcal{I}}(X) \right)$, dla $\alpha > 0$,

gdzie dla dowolnej rodziny $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^X$, $\mathcal{I} - \text{LIM}(\mathcal{E})$ jest rodziną wszystkich $\mathcal{I}$ -granic punktowo $\mathcal{I}$ -zbieżnych ciągów funkcji należących do rodziny $\mathcal{E}$.

Laczkovich i Reclaw w pracy [LR09] badali, dla jakich ideałów $\mathcal{I}$ zachodzi równość $\mathcal{B}_1(X) = \mathcal{B}_1^{\mathcal{I}}(X)$ (nietrudno zauważyć, że zawieranie $\mathcal{B}_1(X) \subset \mathcal{B}_1^{\mathcal{I}}(X)$ zachodzi dla każdego ideału $\mathcal{I}$ zawierającego w sobie ideał zbiorów skończonych Fin). Pokazali, że jeżeli X jest przestrzenią polską, a $\mathcal{I}$ jest ideałem borelowskim, to następujące warunki są równoważne:

- (i) $\mathcal{B}_1(X) = \mathcal{B}_1^{\mathcal{I}}(X)$;
- (ii) istnieje zbiór $A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ typu F_σ taki, że $\mathcal{I} \subset A$ oraz $\mathcal{I}^* \cap A = \emptyset$;
- (iii) $\mathcal{I}$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\text{Fin} \times \text{Fin}$,

gdzie

$$\text{Fin} \times \text{Fin} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \{k : (n, k) \in A\} \text{ jest skończony}\},$$

a $\mathcal{I}$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\text{Fin} \times \text{Fin}$ jeżeli nie istnieje bijekcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ taka, że dla każdego $A \in \text{Fin} \times \text{Fin}$, $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$. Taką samą charakteryzację dla (ogólniejszej) klasy ideałów analitycznych udowodnili Debs i Saint Raymond ([DSR09])⁵.

W pracy [4] wykorzystaliśmy pewną kombinatoryczną charakteryzację ideałów borelowskich spełniających warunek (iii)⁶ do rozszerzenia powyższej równoważności na doskonale normalne przestrzenie topologiczne X . O ile mi wiadomo, nie jest znana odpowiedź na pytanie, czy warunki (i)–(iii) są równoważne dla wszystkich ideałów analitycznych i doskonale normalnych przestrzeni topologicznych.

Dla przestrzeni polskich i skończonego α Laczkovich z Reclawem pokazali, że jeżeli ideał borelowski spełnia warunki (i)–(iii), to $\mathcal{B}_\alpha(X) = \mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(X)$. W pracy [4] uogólniliśmy ten wynik. Wykorzystaliśmy metody zaproponowane w pracy [LR09] i równoważność (i)–(iii) udowodnioną w pracy [DSR09] dla ideałów analitycznych, do pokazania, że jeżeli X jest przestrzenią polską, a $\mathcal{I}$ jest ideałem analitycznym, to z warunków (i)–(iii) wynika, że $\mathcal{B}_\alpha^{\mathcal{I}}(X) = \mathcal{B}_\alpha(X)$ dla dowolnego α .

IDEAŁOWE KLASY BAIRE'A DLA ZBIEŻNOŚCI DYSKRETNEJ I RÓWNEJ

Niech $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$). Będę mówił, że ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$:

- *dyskretnie* (notacja: $\text{d-lim} f_n = f$), jeżeli zbiór $\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \neq f(x)\}$ jest skończony dla każdego $x \in X$;

⁵Jednym z wniosków z udowodnionych przez nas w pracy [4] twierdzeń jest fakt, że warunek (iii) jest równoważny warunkowi: $\text{Fin} \times \text{Fin} \not\leq_K \mathcal{I}$

⁶Wspomniana charakteryzacja to — wprowadzona przez Laflamma ([Laf96]) — tzw. ω -diagonalizowalność przez zbiory $\mathcal{I}^*$ -uniwersalne. Definicja tej własności jest zbyt długa i techniczna, żeby przytaczać ją tutaj.

Le

- *równo* (notacja: $e\text{-}\lim f_n = f$), jeżeli istnieje ciąg $(\varepsilon_n)_n$ taki, że $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ i zbiór $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}$ jest skończony dla każdego $x \in X$.

Dla dowolnej rodziny funkcji $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^X$ symbolem $d\text{-LIM}(\mathcal{E})$ (odpowiednio: $e\text{-LIM}(\mathcal{E})$) będę oznaczał rodzinę wszystkich granic dyskretnych (odpowiednio: granic równych) dyskretnie zbieżnych (odpowiednio: równo zbieżnych) ciągów funkcji należących do klasy $\mathcal{E}$.

Analogicznie do definicji klas Baire'a definiujemy *dyskretne klasy Baire'a* $\mathcal{B}_\alpha^{(d)}(X)$ oraz *równe klasy Baire'a* $\mathcal{B}_\alpha^{(e)}(X)$ ([CL75]):

- $\mathcal{B}_0^{(d)}(X) = \mathcal{B}_0^{(e)}(X) = \mathcal{C}(X)$;
- $\mathcal{B}_\alpha^{(d)}(X) = d\text{-LIM}\left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta^{(d)}(X)\right)$, dla dowolnego $\alpha > 0$;
- $\mathcal{B}_\alpha^{(e)}(X) = e\text{-LIM}\left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta^{(e)}(X)\right)$, dla dowolnego $\alpha > 0$.

W pracy [4] wprowadziliśmy ideałowe wersje powyższych definicji. Dla ustalonego ideału $\mathcal{I}$ będę mówił, że ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do funkcji $f : X \rightarrow \mathbb{R}$:

- $\mathcal{I}$ -*dyskretnie* (notacja: $\mathcal{I} - d\text{-}\lim f_n = f$), jeżeli $\{n \in \mathbb{N} : f_n(x) \neq f(x)\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$;
- $\mathcal{I}$ -*równo* (notacja: $\mathcal{I} - e\text{-}\lim f_n = f$), jeżeli istnieje ciąg $(\varepsilon_n)_n$ taki, że $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ i $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$.

Odpowiednio, dla dowolnej rodziny $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^X$ symbolem $\mathcal{I} - d\text{-LIM}(\mathcal{E})$ (odpowiednio: $\mathcal{I} - e\text{-LIM}(\mathcal{E})$) będę oznaczał rodzinę wszystkich $\mathcal{I}$ -dyskretnych granic (odpowiednio: $\mathcal{I}$ -równych granic) wszystkich $\mathcal{I}$ -dyskretnie zbieżnych (odpowiednio: $\mathcal{I}$ -równo zbieżnych) ciągów funkcji należących do $\mathcal{E}$. Odpowiednie ideałowe klasy Baire'a będę definiował następująco:

- $\mathcal{B}_0^{(\mathcal{I}-d)}(X) = \mathcal{B}_0^{(\mathcal{I}-e)}(X) = \mathcal{C}(X)$;
- $\mathcal{B}_\alpha^{(\mathcal{I}-d)}(X) = \mathcal{I} - d\text{-LIM}\left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta^{(\mathcal{I}-d)}(X)\right)$, dla wszystkich $\alpha > 0$;
- $\mathcal{B}_\alpha^{(\mathcal{I}-e)}(X) = \mathcal{I} - e\text{-LIM}\left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{B}_\beta^{(\mathcal{I}-e)}(X)\right)$, dla wszystkich $\alpha > 0$,

i będę je nazywał $\mathcal{I}$ -*dyskretnymi klasami Baire'a* oraz $\mathcal{I}$ -*równymi klasami Baire'a*.

W pracy [4] pokazaliśmy, że jeżeli X jest przestrzenią doskonale normalną, a ideał borelowski $\mathcal{I}$ spełnia warunki (i)–(iii) sformułowane w poprzednim rozdziale (w szczególności, jeżeli $\mathcal{I}$ nie zawiera izomorficznej kopii ideału $\text{Fin} \times \text{Fin}$), to $\mathcal{B}_\alpha^{(\mathcal{I}-d)}(X) = \mathcal{B}_\alpha^{(d)}(X)$ dla każdego α , oraz $\mathcal{B}_\alpha^{(\mathcal{I}-e)}(X) = \mathcal{B}_\alpha^{(e)}(X)$ dla skończonych α .

O ile mi wiadomo, odpowiedź na pytanie, czy przy analogicznych założeniach o ideałach $\mathcal{I}$ oraz przestrzeni X , $\mathcal{B}_\alpha^{(\mathcal{I}-e)}(X) = \mathcal{B}_\alpha^{(e)}(X)$ dla nieskończonych α jest nieznana.

PORZĄDEK⁷ DEFINIOWANY PRZEZ IDEAŁOWE GRANICE CIĄGÓW ITERACJI

W tej części referatu będę rozpatrywał funkcje określone na odcinku zwartym $\mathbb{I} = [0, 1]$. Dla każdej takiej funkcji $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ oraz $x \in \mathbb{I}$ wprowadzę oznaczenie:

$$f^0(x) = x \text{ oraz } f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \text{ dla } n > 0.$$

Przez ω -*granice funkcji* f w punkcie x (oznaczenie: $\omega_f(x)$) będę rozumiał zbiór wszystkich punktów skupienia ciągu $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, t.j.

$$\omega_f(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{f^n(x) : n \geq N\}}.$$

Każda ω -granica jest zbiorem zwartym, możemy więc traktować ją jako element przestrzeni wszystkich podzbiorów zwartych $\mathbb{I}$ wyposażonej w metrykę Hausdorffa (topologię Vietoris). Przestrzeń tę będę oznaczał symbolem $\mathcal{K}$; wiadomo że jest to przestrzeń zwarta.

⁷Słowo „porządek” użyte jest w tym miejscu jako przeciwieństwo słowa „chaos”.

Jeżeli Φ jest funkcją z $\mathbb{I}$ w $\mathcal{K}$, to będę mówił, że Φ jest odwzorowaniem wielowartościowym *półciągłym z dołu* (odpowiednio: *półciągłym z góry*) jeżeli dla każdego zbioru domkniętego (odpowiednio: otwartego) $V \subset \mathbb{I}$ zbiór $\{x : \Phi(x) \subset V\}$ jest domknięty (odpowiednio: otwarty) w $\mathbb{I}$. Wiadomo, że odwzorowanie wielowartościowe $\Phi: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{K}$ jest ciągle wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest jednocześnie półciągłe z góry i z dołu. Wiadomo też, że jeżeli $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$ dla każdego x , to ciągłość Φ jest równoważna ciągłości funkcji $\varphi: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$.

Będę mówił, że f jest *funkcją typu 2^∞* , jeżeli f ma punkty okresowe o okresie zasadniczym 2^n dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ i nie ma punktów okresowych o okresach innych niż tej postaci. Będę mówił, że f jest *funkcją typu 2^n* , jeżeli f ma punkty okresowe o okresie zasadniczym 2^k dla wszystkich $k \leq n$ i nie ma punktów okresowych o okresach innych niż tej postaci. Będę używał notacji $h(f) = 0$, jeżeli f jest funkcją o zerowej entropii⁸.

Bruckner i Ceder w pracy [BC92] badali, kiedy funkcja $\omega_f: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{K}$ przyporządkowująca każdemu punktowi x zbiór $\omega_f(x)$ jest ciągła. Pokazali, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ następujące warunki są równoważne⁹:

- (i) ω_f jest ciągła;
- (ii) rodzina funkcji $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest równociągła;
- (iii) odwzorowanie wielowartościowe ω_f jest półciągłe z dołu;
- (iv) odwzorowanie wielowartościowe ω_f jest półciągłe z góry.

Wiadomo, że przedstawione powyżej warunki definiują dosyć wąską klasę funkcji, np. każda taka funkcja jest typu 2^2 , a zatem musi mieć zerową entropię (nie jest więc chaotyczna w sensie Li-Yorke'a, nie jest chaotyczna w sensie Devaney'a, etc.)

Będę mówił, że punkt x jest *punktem $\mathcal{I}$ -skupienia ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$* ($x_n \in \mathbb{I}$ dla $n \in \mathbb{N}$), jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}.$$

(Jeżeli $x = \mathcal{I} - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$, to x jest jedynym punktem $\mathcal{I}$ -skupienia ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Dla funkcji $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ przez $\omega^{\mathcal{I}}$ -*granice funkcji f w punkcie x* będę rozumiał zbiór

$$\omega_f^{\mathcal{I}}(x) = \{y \in \mathbb{I} : y \text{ jest punktem } \mathcal{I}\text{-skupienia ciągu } (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Wiadomo, że jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem maksymalnym, to dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktów z przestrzeni metrycznej i zwartej granica $\mathcal{I} - \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$ istnieje; możemy więc dla ideału maksymalnego $\mathcal{I}$ zdefiniować funkcję $f^{\mathcal{I}}$ następująco¹⁰:

$$f^{\mathcal{I}}(x) = \mathcal{I} - \lim_{n \in \mathbb{N}} f^n(x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{I}.$$

Tak zdefiniowane funkcje były rozpatrywane wcześniej np. przez Blassa w pracy [Bla93]. Można też zauważyć, że dla maksymalnego $\mathcal{I}$:

$$\omega_f^{\mathcal{I}}(x) = \{f^{\mathcal{I}}(x)\} \text{ dla każdego } x \in \mathbb{I}.$$

Dla takich $\mathcal{I}$ ciągłość odwzorowania $\omega_f^{\mathcal{I}}$ jest równoważna ciągłości funkcji $f^{\mathcal{I}}$.

García-Ferreira i Sanchis w pracy [GFS07] rozważali problem ciągłości funkcji $f^{\mathcal{I}}$. Pokazali, że jeżeli rodzina funkcji $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ jest równociągła w punkcie x , to $f^{\mathcal{I}}$ jest ciągła w punkcie x dla wszystkich ideałów maksymalnych $\mathcal{I}$. W pracy [5] scharakteryzowałem ciągłość $f^{\mathcal{I}}$ (dla ideałów maksymalnych $\mathcal{I}$), a także ciągłość odwzorowań wielowartościowych $\omega_f^{\mathcal{I}}$ (dla dowolnego $\mathcal{I}$) w następujący sposób:

⁸Nie będę wprowadzał definicji entropii funkcji, będzie mnie interesował jedynie warunek „ $h(f) = 0$ ”. Jest znanych wiele stwierdzeń równoważnych faktowi, że funkcja ciągła $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ ma zerową entropię (zob. np. [FSS90, Tw. A]); w szczególności wiadomo, że $h(f) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją typu 2^∞ (dla pewnego n) albo f jest funkcją typu 2^∞ .

⁹Przytoczone tu warunki to jedynie niektóre z podanych przez Brucknera i Cedera w pracy [BC92] warunków równoważnych ciągłości funkcji ω_f .

¹⁰Uzasadnieniem dla użycia w tym kontekście notacji „ f z indeksem górnym $\mathcal{I}$ ” jest fakt, że każdą liczbą naturalną n można przyporządkować pewnemu ideałowi maksymalnemu $\mathcal{I}$ (elementowi uzwarcenia Čecha-Stone’a $\mathbb{N}$) w taki sposób, że $f^{\mathcal{I}} = f^n$ (gdzie f^n oznacza n -tą iterację funkcji f).

Twierdzenie 6. Jeżeli $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ jest funkcją ciągłą, to warunki (i)–(iv) są równoważne warunkom:

- (v) rodzina funkcji $\{f^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \text{ jest ideałem maksymalnym}\}$ jest równociągła;
- (vi) istnieje ideał maksymalny $\mathcal{I}$ taki, że $\text{Fin} \subset \mathcal{I}$ oraz funkcja $f^{\mathcal{I}}$ jest ciągła;
- (vii) rodzina odwzorowań $\{\omega_f^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \text{ jest ideałem}\}$ jest równociągła;
- (viii) istnieje ideał $\mathcal{I}$ taki, że $\text{Fin} \subset \mathcal{I}$ oraz odwzorowanie $\omega_f^{\mathcal{I}}$ jest ciągłe.

Powyższe twierdzenie charakteryzuje ciągłość funkcji $f^{\mathcal{I}}$ (i odwzorowań $\omega_f^{\mathcal{I}}$) w sensie „globalnym”. O ile mi wiadomo, nie jest znana odpowiedź na pytanie, czy istnieje $x \in \mathbb{I}$ oraz ideały maksymalne $\mathcal{I} \supset \text{Fin}$ oraz $\mathcal{J}$ takie, że $f^{\mathcal{I}}$ jest ciągła w x , podczas gdy $f^{\mathcal{J}}$ nie jest ciągła w x ([GFS07, Pytanie 5.2]).

Twierdzenie 6 ma związek z pytaniem o charakteryzację tych funkcji f , dla których wszystkie funkcje $f^{\mathcal{I}}$ (dla ideału maksymalnego $\mathcal{I}$) są pierwszej klasy Baire’a. Jeżeli przez $E(f)$ oznaczymy półgrupę Ellisa dla f , tj. domknięcie zbioru $\{f^n : n \in \mathbb{N}\}$ w przestrzeni $\mathbb{I}^{\mathbb{I}}$ (z topologią punktową zbieżności¹¹), to wiadomo, że:

$$E(f) = \{f^{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \text{ jest ideałem maksymalnym}\}.$$

Układy dynamiczne (X, f) dla których $E(f) \subset B_1(X)$ są nazywane *monotonnymi* ([Gla06]). Poniższe twierdzenie jest zestawieniem wyników z prac [BFT78], [GM06], [GM08] i [Ros74] i charakteryzuje sytuację, gdy $f^{\mathcal{I}}$ jest pierwszej klasy Baire’a dla każdego ideału maksymalnego $\mathcal{I}$.

Twierdzenie 7. Jeżeli X jest zwartą przestrzenią metryczną, a $f: X \rightarrow X$ jest funkcją ciągłą, to następujące warunki są równoważne:

- (i') $E(f) \subset B_1(X)$ (tj. (X, f) jest monotony);
- (ii') moc zbioru $E(f)$ wynosi co najwyżej $\mathfrak{c}$;
- (iii') $E(f)$ nie zawiera w sobie podzbioru izomorficznego z uzwarceniem Čecha-Stone’a zbioru liczb naturalnych;
- (iv') dla dowolnego $g \in E(f)$ można znaleźć taki monotoniczny ciąg liczb naturalnych $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, że $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k} \rightarrow g$.

Z równoważności warunków (ii') i (iii') oraz z faktu, że moc uzwarcenia Čecha-Stone’a zbioru liczb naturalnych jest równa $2^{\mathfrak{c}}$ wynika, że moc przestrzeni $E(f)$, albo jest nie większa niż $\mathfrak{c}$, albo wynosi dokładnie $2^{\mathfrak{c}}$.

We wspomnianym wcześniej artykule [BC92] Bruckner i Ceder pokazali, że stwierdzenie „ ω_f nie jest pierwszej klasy Baire’a” definiuje pewną formę chaosu znajdującą się pomiędzy chaosem w sensie dodatniej entropii, a chaosem w sensie Li-Yorke’a. Pokazali, że jeżeli $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ jest ciągłą, to ω_f jest pierwszej klasy Baire’a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in \mathbb{I}$ ω -granica funkcji f w punkcie x jest albo zbiorem skończonym, albo zbiorem homeomorficznym ze zbiorem Cantora.

W pracy [5] rozważam problem, czy chaos w sensie Brucknera i Cedera jest równoważny temu, że układ dynamiczny nie jest monotony. Udowodniłem, że:

- jeżeli f jest funkcją typu 2^n , to odwzorowania wielowartościowe $\omega_f^{\mathcal{I}}$ są pierwszej klasy Baire’a dla każdego ideału $\mathcal{I}$;
- warunek $h(f) > 0$ implikuje, że żadne z odwzorowań wielowartościowych $\omega_f^{\mathcal{I}}$ nie jest pierwszej klasy Baire’a (dla ideałów $\mathcal{I}$ takich, że $\text{Fin} \subset \mathcal{I}$).

Zatem wspomniany wyżej problem sprowadza się do pytania o równoważność chaosu w sensie Brucknera i Cedera i monotoniczności układu dynamicznego dla funkcji typu 2^{∞} . O ile mi wiadomo, odpowiedź na to pytanie nie jest obecnie znana.

¹¹Topologia punktową zbieżności (równoważnie: topologia produktowa Tichonowa) w omawianym tutaj przypadku jest zwarta i niemetryzowalna.

Le

5. Na pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze składają się następujące publikacje:

- [6] P. Szuca, Every almost continuous function is polygonally almost continuous, *Real Anal. Exchange*, 25(2): 691–694, 1999–2000.
- [7] P. Szuca, On some properties of sets blocking almost continuous functions, *Real Anal. Exchange*, 27(1): 373–388, 2001–02.
- [8] P. Szuca, A note on away-almost continuous functions, *Topology Proc.*, 27(1): 299–305, 2003.
- [9] P. Szuca, Sharkovskii's theorem holds for some discontinuous functions, *Fund. Math.*, 179: 27–41, 2003.
- [10] P. Szuca, Loops of intervals and Darboux Baire 1 fixed point problem, *Real Anal. Exchange*, 29(1): 205–209, 2003–04.
- [11] P. Szuca, The composition of two connected G_δ functions has a fixed point, *Real Anal. Exchange*, 29(2): 931–938, 2003–04.
- [12] Tomasz Dzido, Andrzej Nowik, P. Szuca, New lower bound for multicolor Ramsey numbers for even cycles, *Electron. J. Combin.*, 12: Note 13, 2005.
- [13] Jan Andres, Pavla Šnyrychová, P. Szuca, Sharkovskii's theorem for connectivity G_δ -relations, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 16(8): 2377–2393, 2006.
- [14] P. Szuca, The Covering Principle for Darboux Baire 1 functions, *Fund. Math.*, 193(2): 133–140, 2007.
- [15] P. Szuca, Connected G_δ functions of arbitrarily high Borel class, *Tatra Mt. Math. Publ.*, 35: 41–45, 2007.
- [16] Rafał Filipów, P. Szuca, Rearrangement of conditionally convergent series on a small set, *J. Math. Anal. Appl.*, 362(1): 64–71, 2010.
- [17] Tomasz Natkaniec, P. Szuca, On Pawlak's problem concerning entropy of almost continuous functions, *Colloq. Math.*, 121(1): 107–111, 2010.
- [18] Rafał Filipów, Andrzej Nowik, P. Szuca, There are measurable Hamel functions, *Real Anal. Exchange*, 36(1): 223–230, 2010–11.
- [19] Rafał Filipów, Nikodem Mrozek, Ireneusz Reclaw, P. Szuca, Ideal version of Ramsey's theorem, *Czechoslovak Math. J.*, 61(2): 289–308, 2011.
- [20] Paweł Barbarski, Rafał Filipów, Nikodem Mrozek, P. Szuca, Uniform density u and $\mathcal{I}_u$ -convergence on a big set, *Math. Commun.*, 16(1): 125–130, 2011.

W pracy [6] pokazałem, że jeżeli funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest prawie ciągła w sensie Stallinsa (tj. każde otwarte otoczenie wykresu f zawiera wykres funkcji ciągłej $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), to jest także prawie kawałkami liniowa, tj. o wykresie funkcji g można zakładać, że jest kawałkami liniowa o punktach węzłowych leżących w wykresie f . Stanowiło to rozwiązanie problemu z pracy [ACP98]. Na podstawie tej pracy napisałem pod kierunkiem prof. Tomasza Natkańca pracę magisterską pt. „Nowe charakteryzacje funkcji prawie ciągłych”.

Prace [7] i [8] były poświęcone problemowi charakteryzacji granic jednostajnie zbieżnych ciągów funkcji prawie ciągłych ([Kel74], [GN99]). Problemu tego nie rozwiązałem (o ile mi wiadomo, cały czas pozostaje on otwarty), zaproponowałem pewne warunki wystarczające i pewne warunki konieczne. Warunki te pokrywają się np. w klasie funkcji o wykresie gęstym na płaszczyźnie. Niektóre z rezultatów z pracy [7] zostały wykorzystane przez Rosena w pracy [Ros02] do analizy zawierań różnych podklas funkcji typu Darboux.

Prace [9], [10], [11] i [15] były motywowane problemem, czy złożenie funkcji pochodnych z odcinka zwartego $\mathbb{I}$ w $\mathbb{I}$ musi mieć punkt stały (pytanie to zostało sformułowane np. w pracy przeglądowej [GN99]). Wiadomo, że klasa funkcji pochodnych jest zawarta (w sposób właściwy) w rodzinie

funkcji Darboux pierwszej klasy Baire'a, wiadomo też było wcześniej, że odpowiedź na to pytanie zarówno w klasie funkcji pochodnych, jak i w klasie funkcji DB_1 jest identyczna. Pozytywnej odpowiedzi na to pytanie udzielili niezależnie Elekes, Keleti i Prokaj ([EKP02]) oraz Csörnyei, O'Neil i Preiss ([COP01]). W pracy [11] uogólniłem ich rezultaty na klasę funkcji o wykresie będącym zbiorem spójnym typu G_δ na płaszczyźnie (klasa ta zawiera w sobie w sposób istotny funkcje Darboux pierwszej klasy Baire'a). Następnie w pracy [9] pokazałem, że charakterystyka Szarkowskiego zbiorów okresów zasadniczych punktów okresowych sformułowana oryginalnie dla funkcji ciągłych, działa również w klasie funkcji spójnych G_δ . Wynik ten jest rozwiązaniem problemu Kelluma z pracy [Kel89]. Wykorzystując pewne lematy z pracy [9], w pracy [10] pokazałem że złożenie dowolnej (skończonej) liczby funkcji spójnych G_δ ma punkt stały (było to rozwiązanie problemu sformułowanego w pracy [COP01]). W pracy [15] znajduje się dowód faktu, że funkcje spójne G_δ mogą być dowolnie wysokiej klasy borelowskiej. Wyniki z prac [9] i [10] zawarłem w swojej rozprawie doktorskiej pt. „Punkty stałe odwzorowań typu Darboux”, napisanej pod kierunkiem prof. Tomasza Natkańca.

Badanie dynamiki funkcji z własnością Darboux było kontynuowane później, w przypadku funkcji spójnych G_δ przez Čiklovą ([Čik05], [Čik07]), w przypadku funkcji prawie ciągłych przez Pawłaka, który w pracy [Paw09] pytał się, czy charakterystyka Misiurewicza funkcji ciągłych z zerową entropią działa także w klasie funkcji prawie ciągłych w sensie Stallingsa. W pracy [17] wspólnie z Tomaszem Natkańcem rozstrzygnęliśmy ten problem pokazując, że jeżeli funkcja z własnością Darboux ma punkt okresowy o okresie zasadniczym nie będącym potęgą liczby 2, to funkcja ta musi mieć dodatnią entropię. Z drugiej strony, dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{N}$ takiego, że $1 \in A$, istnieje funkcja prawie ciągła $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ (każda funkcja prawie ciągła ma własność Darboux) taka, że zbiór okresów zasadniczych punktów okresowych f jest równy A .

Z powyższym kierunkiem badań wiąże się praca [13]. Wspólnie z Janem Andresem i Pavłą Šnrychovą zajmowaliśmy się w niej wspólnym uogólnieniem twierdzenia Szarkowskiego dla odwzorowań wielowartościowych i dla funkcji spójnych G_δ (charakterystyka zbiorów okresów zasadniczych punktów okresowych dla funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ działa także — z pewnymi wyjątkami — w niektórych klasach odwzorowań wielowartościowych określonych na przestrzeni $\mathbb{R}$ i działających w przestrzeni $\mathbb{R}$). Pokazaliśmy, że charakterystyka Szarkowskiego (w wersji wielowartościowej, tj. z pewnymi wyjątkami) spełniona jest w klasie odwzorowań wielowartościowych (używając innego nazewnictwa: w klasie relacji), których wykres jest zbiorem typu G_δ na płaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i których obcięcie do dowolnego zbioru spójnego jest zbiorem spójnym.

Najważniejszym narzędziem udowodnionym w pracy [9] i używanym do udowodnienia twierdzenia Szarkowskiego dla funkcji spójnych G_δ jest tzw. Lemat Podróżniczy (czasami nazywany Lematem Pokryciowym) w wersji dla cykli. W pracy [14] pokazałem, że w interesującej mnie klasie funkcji prawdziwa jest także ścieżkowa wersja Lematu Podróżniczego. Wykorzystałem taką wersję do pokazania, że istnieje funkcja aproksymatywnie ciągła $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ (funkcja taka jest pochodną, a więc jest także funkcją spójną G_δ), dla której do rodziny $\{\omega_f(x) : x \in \mathbb{I}\}$ należy przesunięcie każdego zbioru domkniętego zawartego w $\mathbb{I}$. Było to rozwiązanie problemu postawionego w pracy [BCP90].

W pracy [18], napisanej z Rafałem Filipów i Andrzejem Nowikiem, rozpatrywaliśmy pytanie, czy istnieją funkcje mierzalne o wykresie będącym bazą Hamela na płaszczyźnie. Badanie funkcji Hamela zostało zainicjowane przez Płotkę w pracy [Pł03]. Pokazaliśmy, że istnieje funkcja Hamela, która jest jednocześnie mierzalna w sensie Lebesgue'a i ma własność Baire'a. Sprawdziliśmy też, że istnieją funkcje Hamela mierzalne w sensie Marczewskiego. Ten kierunek badań był kontynuowany np. przez Matusika i Natkańca w pracach [MN10], [Nat11].

Prace [16], [19] i [20] (współautorzy: Paweł Barbarski, Rafał Filipów, Nikodem Mrożek i Ireneusz Reclaw) wpisują się w tematykę badania własności ideałów określonych na zbiorze liczb naturalnych. W pracy [16] udowodniliśmy ideałową wersję twierdzenia Riemanna pokazując, że ideał nie rozszerza się do ideału sumowalnego (tj. do ideału postaci $\{A \subset \mathbb{N} : \sum_{i \in A} f(i) < +\infty\}$ dla pewnego $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$) wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym szeregu warunkowo zbieżnym i dla dowolnego $r \in \mathbb{R}$ można zmienić kolejność wyrazów tego szeregu na zbiorze z ideału w taki sposób, aby otrzymać szereg zbieżny do r . Podana przez nas charakterystyka stanowiła rozwiązanie problemu Wilczyńskiego ([Wil07]). Tematyka ta była kontynuowana w pracy [BM11], gdzie (korzystając z naszych wyników) Bermúdez i Martínón sformułowali inny warunek równoważny naszej charak-

teryzacji¹². W pracy [19] badaliśmy związki pomiędzy własnością Bolzano-Weierstrassa, znanym z kombinatoryki twierdzeniem Ramsey’a oraz istnieniem podciągu monotonicznego (w różnym sensie, związanym z pojęciem ideału). Do niektórych z naszych wyników nawiązał Meza-Alcántara w swojej rozprawie doktorskiej ([MA09]). W ostatniej z wymienionych prac ([20]) badaliśmy własności ideału zbiorów zerowych względem tzw. jednostajnej gęstości u .

Praca [12], napisana wspólnie z Tomaszem Dzido i Andrzejem Nowikiem, dotyczy problemu oszacowania liczby Ramsey’a dla cykli (tj. pytania, jak duży musi być rozmiar grafu pełnego, żeby w dowolnym pokolorowaniu krawędziowym tego grafu r kolorami istniał monochromatyczny cykl długości m). Jest to klasyczne zagadnienie kombinatoryki skończonej, dla cykli nieparzystej długości rozpatrywane np. przez Erdősa ([Erd81]). W pracy tej podaliśmy oszacowanie dolne dla cykli parzystej długości. Wynik ten wymieniany jest w pracach przeglądowych, np. [Rad11a]. Później oszacowanie to okazało się dokładną wartością liczby Ramsey’a dla wartości m bardzo dużych ([BS09]) i bardzo małych ([Rad11b]).

LITERATURA

- [ACP98] S. J. Agronsky, J. G. Ceder, T. L. Pearson. Some characterizations of Darboux Baire 1 functions. *Real Anal. Exchange*, 23(2):421–430, 1997/98.
- [BC92] A. M. Bruckner, J. Ceder. Chaos in terms of the map $x \rightarrow \omega(x, f)$. *Pacific J. Math.*, 156(1):63–96, 1992.
- [BCP90] A. M. Bruckner, J. G. Ceder, T. L. Pearson. On ω -limit sets for various classes of functions. *Real Anal. Exchange*, 15(2):592–604, 1989/90.
- [Ber86] Vitaly Bergelson. A density statement generalizing Schur’s theorem. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43(2):338–343, 1986.
- [BFT78] J. Bourgain, D. H. Fremlin, M. Talagrand. Pointwise compact sets of Baire-measurable functions. *Amer. J. Math.*, 100(4):845–886, 1978.
- [Bla93] Andreas Blass. Ultrafilters: where topological dynamics = algebra = combinatorics. *Topology Proc.*, 18:33–56, 1993.
- [BM11] Teresa Bermúdez, Antonio Martín. Changes of signs in conditionally convergent series on a small set. *Appl. Math. Lett.*, 24(11):1831–1834, 2011.
- [Bou40] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Part I. Les structures fondamentales de l’analyse. Livre III. Topologie générale. Chapitres I et II.* Actual. Sci. Ind., no. 858. Hermann & Cie., Paris, 1940.
- [BS09] Fabricio Siqueira Benevides, Jozef Skokan. The 3-colored Ramsey number of even cycles. *J. Combin. Theory Ser. B*, 99(4):690–708, 2009.
- [Car37] Henri Cartan. Filtres et ultrafiltres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 205:777–779, 1937.
- [Čik05] Michaela Čiklová. Dynamical systems generated by functions with connected G_δ graphs. *Real Anal. Exchange*, 30(2):617–637, 2004/05.
- [Čik07] Michaela Čiklová. Minimal and ω -minimal sets of functions with connected G_δ graphs. *Real Anal. Exchange*, 32(2):397–408, 2007.
- [CL75] Á. Császár, M. Laczkovich. Discrete and equal convergence. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 10(3-4):463–472 (1978), 1975.
- [COP01] Marianna Csörnyei, Toby C. O’Neil, David Preiss. The composition of two derivatives has a fixed point. *Real Anal. Exchange*, 26(2):749–760, 2000/01.

¹²W omawianym artykule podaliśmy warunki (R) i (W), które — jak udowodniliśmy później (niepublikowane) — są równoważne warunkowi (ASP) sformułowanemu wcześniej w pracy [DP00].

he

- [DL08] Lech Drewnowski, Tomasz Łuczak. On nonatomic submeasures on $\mathbb{N}$. II. *J. Math. Anal. Appl.*, 347(2):442–449, 2008.
- [DP00] Lech Drewnowski, Pedro J. Paúl. The Nikodým property for ideals of sets defined by matrix summability methods. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. (Esp.)*, 94(4):485–503, 2000. Perspectives in mathematical analysis (Spanish).
- [DSR09] Gabriel Debs, Jean Saint Raymond. Filter descriptive classes of Borel functions. *Fund. Math.*, 204(3):189–213, 2009.
- [EKP02] M. Elekes, T. Keleti, V. Prokaj. The fixed point of the composition of derivatives. *Real Anal. Exchange*, 27(1):131–140, 2001-02.
- [Erd81] P. Erdős. On the combinatorial problems which I would most like to see solved. *Combinatorica*, 1(1):25–42, 1981.
- [FGR90] P. Frankl, R. L. Graham, V. Rödl. Iterated combinatorial density theorems. *J. Combin. Theory Ser. A*, 54(1):95–111, 1990.
- [FŠS90] V. V. Fedorenko, A. N. Šarkovskii, J. Smítal. Characterizations of weakly chaotic maps of the interval. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 110(1):141–148, 1990.
- [GFS07] S. García-Ferreira, M. Sanchis. Ultrafilter-limit points in metric dynamical systems. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 48(3):465–485, 2007.
- [Gla06] E. Glasner. On tame dynamical systems. *Colloq. Math.*, 105(2):283–295, 2006.
- [GM06] E. Glasner, M. Megrelishvili. Hereditarily non-sensitive dynamical systems and linear representations. *Colloq. Math.*, 104(2):223–283, 2006.
- [GM08] E. Glasner, M. Megrelishvili. New algebras of functions on topological groups arising from G -spaces. *Fund. Math.*, 201(1):1–51, 2008.
- [GN99] Richard G. Gibson, Tomasz Natkaniec. Darboux-like functions. Old problems and new results. *Real Anal. Exchange*, 24(2):487–496, 1998/99.
- [Hru11] Michael Hrušák. Combinatorics of filters and ideals. *Set theory and its applications*, wolumen 533 serii *Contemp. Math.*, strony 29–69. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [JK84] Winfried Just, Adam Krawczyk. On certain Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/I$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 285(1):411–429, 1984.
- [Kat68] M. Katětov. Products of filters. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 9:173–189, 1968.
- [Kat72] M. Katětov. On descriptive classes of functions. *Theory of sets and topology (in honour of Felix Hausdorff, 1868–1942)*, strony 265–278. VEB Deutsch. Verlag Wissensch., Berlin, 1972.
- [Kel74] Kenneth R. Kellum. Sums and limits of almost continuous functions. *Colloq. Math.*, 31:125–128, 1974.
- [Kel89] Kenneth R. Kellum. Iterates of almost continuous functions and Sarkovskii’s theorem. *Real Anal. Exchange*, 14(2):420–422, 1988/89.
- [KŠW01] Pavel Kostyrko, Tibor Šalát, Władysław Wilczyński. $\mathcal{I}$ -convergence. *Real Anal. Exchange*, 26(2):669–685, 2000/01.
- [Laf96] Claude Laflamme. Filter games and combinatorial properties of strategies. *Set theory (Boise, ID, 1992–1994)*, wolumen 192 serii *Contemp. Math.*, strony 51–67. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

- [LR09] Miklós Laczkovich, Ireneusz Reclaw. Ideal limits of sequences of continuous functions. *Fund. Math.*, 203(1):39–46, 2009.
- [MA09] D. Meza-Alcántara. *Ideals and filters on countable set*. Praca doktorska, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
- [Mat77] A. R. D. Mathias. Happy families. *Ann. Math. Logic*, 12(1):59–111, 1977.
- [Maz91] Krzysztof Mazur. F_σ -ideals and $\omega_1\omega_1^*$ -gaps in the Boolean algebras $P(\omega)/I$. *Fund. Math.*, 138(2):103–111, 1991.
- [MN10] G. Matusik, T. Natkaniec. Algebraic properties of Hamel functions. *Acta Math. Hungar.*, 126(3):209–229, 2010.
- [Nat11] Tomasz Natkaniec. An example of quasi-continuous Hamel function. *Real Anal. Exchange*, 36(1):231–236, 2011.
- [Paw09] Ryszard J. Pawlak. On the entropy of Darboux functions. *Colloq. Math.*, 116(2):227–241, 2009.
- [Pł03] Krzysztof Płotka. On functions whose graph is a Hamel basis. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(4):1031–1041 (electronic), 2003.
- [Rad11a] Stanisław P. Radziszowski. Ramsey numbers involving cycles. *Ramsey theory*, wolumen 285 serii *Progr. Math.*, strony 41–62. Birkhäuser/Springer, New York, 2011.
- [Rad11b] Stanisław P. Radziszowski. Small Ramsey numbers. *Electron. J. Combin.*, 2011. Wersja 13 (elektroniczna).
- [Ros02] Harvey Rosen. Porosity of the extendable connectivity function space. *Real Anal. Exchange*, 27(2):457–462, 2001/02.
- [Ros74] Haskell P. Rosenthal. A characterization of Banach spaces containing l^1 . *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 71:2411–2413, 1974.
- [Sol99] Sławomir Solecki. Analytic ideals and their applications. *Ann. Pure Appl. Logic*, 99(1-3):51–72, 1999.
- [Wil07] Władysław Wilczyński. On Riemann derangement theorem. *Stupskie Prace Matematyczno-Fizyczne*, 4:79–82, 2007.

Gdańsk, 27.VII.2012


.....
Piotr Suca