

Autoreferat

Dr Marcina Wieśniaka
na potrzeby procedury habilitacyjnej

Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Uniwersytet Gdański

Gdańsk, 13 września 2013

1. Imię i nazwisko: **Marcin Wieśniak**
2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe
 - a) Stopień magistra fizyki, specjalność: fizyka teoretyczna, 2003, Uniwersytet Gdański (promotor: prof. dr hab. Marek Żukowski)
 - b) Stopień doktora nauk fizycznych, specjalność: fizyka teoretyczna, 2007, Uniwersytet Gdański, tytuł rozprawy: Quantum entanglement in some physical systems (promotor: prof. dr hab. Marek Żukowski)
3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych
 1. Maj 2012-obecnie: starszy specjalista d.s. projektu Quasar, Uniwersytet Gdański
 2. Styczeń-Grudzień 2011: adiunkt, Uniwersytet Gdański
 3. Sierpień 2009-Grudzień 2010: post-doc, Uniwersytet Wiedeński, Austria
 4. Listopad 2008-Lipiec 2009: adiunkt, Uniwersytet Gdański
 5. Lipiec 2007-Wrzesień 2008: research fellow, Narodowy Uniwersytet Singapuru, Singapur
 6. Listopad 2004-luty 2005: asystent, Uniwersytet Wiedeński, Austria
4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.):
 - a) Tytuł osiągnięcia: Nowe metody identyfikacji wybranych zjawisk o charakterze ściśle kwantowym
 - b) Wykaz publikacji wchodzących w skład osiągnięcia:

[W1] Yu-chun Wu, Piotr Badziąg, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, *Extending Bell inequalities to more parties*, *Physical Review A* **77**, 032105, 2008.

Mój udział w pracy polegał na pomocy w opracowaniu podstaw metody rozszerzania nierówności Bella poprzez wykonanie obliczeń symbolicznych. Mój udział szacuję na 10%.

[W2] Wiesław Laskowski, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, Mohamed Bourennane, Harald Weinfurter, *Interference contrast in multi-source few photon optics*, *Journal of Physics B* **42**, 114004, 2009.

Mój wkład w tę pracę polegał na pomocy w analizie struktury szumu przy jednoczesnej emisji kilku par splątanych fotonów, analizie ograniczeń na kontrast interferencji wynikających z czasowej rozróżnialności poszczególnych par fotonów i pomocy w przygotowaniu manuskryptu. Mój udział oceniam na 30%

[W3] Radek Lapkiewicz, Peizhe Li, Christoph Shaeff, Nathan K. Langford, Sven Ramelow, Marcin Wieśniak, Anton Zeilinger, *Experimental non-classicality of a non-divisible system*, *Nature* **474**, 490-493, 2011.

Mój wkład polegał na pomocy przy projektowaniu eksperymentu falsyfikującego modele z niekontekstualnymi zmiennymi ukrytymi, ogólnych dyskusjach, wyprowadzeniu członu poprawki uwzględniającej niedoskonałości doświadczalne, ogólnych dyskusjach i obliczeniach numerycznych. Mój udział szacuję na 14%.

[W4] Marcin Wieśniak, Koji Maruyama, *Package of facts and theorems for efficiently generating entanglement criteria for many qubits*, *Physical Review A* **85**, 062313, 2012.

Mój wkład polegał na propozycji badań, przeprowadzeniu większości dowodów, przygotowaniu i post-produkcji artykułu. Mój udział szacuję na 80%.

[W5] Marcin Wieśniak, Mohamed Nawareg, Marek Żukowski, *N-partite nonclassicality without N-partite correlations*, *Physical Review A* **86** 042339, 2012.

Mój wkład w pracę polegał na zaproponowaniu metody wyprowadzaniu nowych nierówności Bella, wyprowadzeniu warunków koniecznych na ich łamanie, przygotowaniu i post-produkcji manuskryptu. Mój udział szacuję na 55%.

[W6] Arijit Dutta, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, *Multisetting Bell inequalities for N spins-1 avoiding KS paradox*, *Physical Review A* **86**, 032111, 2012.

Mój wkład polegał na propozycji nowych nierówności Bella, ogólnej dyskusji i post-produkcji manuskryptu. Szacuję mój udział na 50%.

[W7] Wiesław Laskowski, Marcin Markiewicz, Tomasz Paterek, Marcin Wieśniak, *Incompatible local hidden variable models*, *Physical Review A* **86**, 032105, 2012.

Mój wkład w tę pracę polegał na ogólnych dyskusjach nad pomysłem, wynikami i pomocy w przygotowywaniu manuskryptu. Szacuję mój udział na 10%.

c) Omówienie celu naukowego w.w. prac i osiągniętych wyników.

W 1935 Einstein, Podolski i Rosen [1] opisali pozorny paradoks pokazujący, że mechanika kwantowa nie może opisywać wszystkich elementów rzeczywistości (wielkości, których wynik pomiaru możemy przewidzieć bez dodatkowych ingerencji w mierzony układ, założenie realizmu) przy założeniu lokalności (dwa zdarzenia rozdzielone interwałem przestrzennym nie mogą mieć na siebie wpływu). Paradoks EPR zaowocował długą dyskusją nad możliwością uzupełnienia mechaniki kwantowej parametrami, których wartość pozostawałaby nieznana dla obserwatorów (tłumaczając tym samym losowość tej teorii), a przypisywałyby one wszystkim pomiarom wyniki. Taką teorię dla układów z ciągłymi stopniami swobody zaproponował Bohm w 1952 roku [2] jednak jej zmienne ukryte nie miały charakteru lokalnego. Z drugiej strony, zainspirowani wynikami Gleasona [3], Kochen i Specker [4] pokazali w 1967 roku, że takie teorie z niekontekstualnymi zmiennymi ukrytymi nie mogą istnieć dla układów trójpoziomowych, a już w 1964 Bell [5] pokazał, że opis z lokalnymi ukrytymi zmiennymi nie jest możliwy dla dwóch układów kwantowych o wymiarze co najmniej 2, z których każdy znajduje się u innego obserwatora.

Twierdzenie Bella stanowi, że jeżeli obserwowalny świat daje się opisać przez teorie lokalnie realistyczne, pewne nierówności statystyczne będą zawsze

spełnione. Tak naprawdę przedmiotem moich badań jest więc odwrotne twierdzenie Bella, stanowiące iż jeżeli złamiemy chociaż jedną z tych nierówności w prawidłowo wykonanym eksperymencie, teorie lokalnie realistyczne nie mogą być poprawne. Jedną z najprostszych nierówności Bella jest ta wyprowadzona przez Clausera, Horne'a, Shimony'ego i Holta (CHSH) [6]:

$$\langle A_1 B_1 + A_1 B_2 + A_2 B_1 - A_2 B_2 \rangle_{LHV} \leq 2, \quad (1)$$

gdzie A_1 i A_2 to obserwable po jednej stronie (Alicji), B_1 i B_2 – po stronie Boba (wszystkie te pomiary dają wyniki ± 1), a nawias trójkątny oznacza uśrednianie. Eksperyment typu Bella dla dwóch partnerów przebiegałby więc następująco: wspólne źródło emituje parę cząstek do dwóch odległych od siebie obserwatorów. Ci, niezależnie od siebie, wybierają jeden z lokalnych pomiarów i po otrzymaniu wyników wymieniają się informacją o ustawieniach i wynikach i liczą średnie po wielu powtórzeniach eksperymentu.

Obu pomiarów po każdej ze stron nie możemy wykonać jednocześnie, stąd na gruncie filozoficznym niezbędne jest założenie, że obserwatorzy wybierają swoje pomiary w akcie wolnej woli, lub procesie losowym. Od strony technicznej musimy zabezpieczyć interwał typu przestrzennego pomiędzy pomiarami Alicji i Boba (co ma wykluczyć komunikację między cząstkami), odpowiednio szybki wybór lokalnych pomiarów (by źródło nie mogło zakodować informacji o nich w emitowanej parze), a także wysoką wydajność źródła dystrybuowanych cząstek i detektorów (by lokalny realizm nie „ukrył się” w zdarzeniach, których nie zaobserwowaliśmy). Dotychczas nie udało się jednocześnie spełnić wszystkich tych warunków, choć dzięki nowej generacji detektorów można się tego spodziewać w najbliższych latach. W wielu eksperymentach [7, 8, 9] udało się jednak osobno spełnić każdy z tych warunków i pokazano w sposób przekonujący łamanie nierówności zgodne z przewidywaniami mechaniki kwantowej.

Takie łamanie wymaga jednak użycia stanów splątanych. Z matematycznego punktu widzenia, stan czysty $|\varphi\rangle$ jest splątany, kiedy nie daje się opisać jako produkt stanów podukładów, $|\varphi\rangle \neq |\varphi\rangle_A |\varphi\rangle_B$, czyli jest zdelokalizowaną superpozycją lokalnie i makroskopowo rozróżnialnych możliwości. Fizycznie można go zaś zinterpretować w ten sposób, że własności jednego podukładu istnieją tylko w odniesieniu do drugiego. Dla stanów mieszanych sytuacja jest w ogólności bardzo skomplikowana: nie tylko nie umiemy podać warunku koniecznego i dostatecznego na splątanie stanu, ale też obserwujemy wiele jego rodzajów, np. splątanie związane [10], czy z nieujemną częściową transpozycją [11]. Te podziały nie pokrywają się zresztą z klasyfikacją ze względu na możliwość bezpośredniego łamania nierówności Bella, istnieje też skomplikowana klasyfikacja splątania wielocząstkowego [12].

Twierdzenie Bella stało się przedmiotem bliższego zainteresowania w latach osiemdziesiątych XX wieku dzięki rozwojowi technik optycznych, a także, w pewnym stopniu, elektroniki i informatyki. W 1982 roku Aspect, Dalibard i Roger [7] wykonali pierwsze doświadczenie typu Bella, a 2 lata później Bennett i Brassard [13] przedstawili kwantowy protokół generowania klucza kryptograficznego. Lata dziewięćdziesiąte to dalszy rozwój teorii informacji

kwantowej, głównie prezentacja kwantowych algorytmów pewnych obliczeń [14, 15, 16], propozycja kwantowej teleportacji [17], a także istotny rozwój technik doświadczalnych, pozwalających na tworzenie i wykorzystanie splątania. Choć wyniki te nie zawsze były wprost oparte na twierdzeniu Bella, przyczyniły się istotnie do prezentacji nowych możliwości, jakie daje kwantowe przetwarzanie informacji. W XXI wieku doczekaliśmy się wielu istotnych uogólnień nierówności Bella, a także bezpośredniego powiązania twierdzenia Bella z takimi zadaniami obliczeniowymi, jak redukcja złożoności komunikacyjnej obliczeń rozłożonych pomiędzy partnerów [18], a także dzielenie się sekretem [19].

Badania, w których uczestniczyłem w latach 2007-2013 (a także wcześniej) miały na celu poszerzenie naszej wiedzy o łamaniu nierówności Bella, a szerzej, o obecności splątania, niekoniecznie pozwalającego na falsyfikację lokalnych zmiennych ukrytych.

Spośród nierówności Bella szczególną rolę zajmują nierówności przyległe (tight). Każda taka nierówność wyznacza hiperpłaszczyznę w wielowymiarowej przestrzeni opisującej badane wartości średnie [20]. Hiperpłaszczyzny wyznaczone przez wszystkie nierówności przyległe ograniczają wielościan (w sensie hiperprzestrzeni) zawierający statystyki, dla których istnieje lokalny model realistyczny. W związku z tym nierówności przyległe możliwie najlepiej oddzielają korelacje czysto kwantowe od tych dających się modelować klasycznie. Niestety, trudność generowania przyległych nierówności rośnie co najmniej wykładniczo z ilością cząstek. Praca [W1] (według spisu powyżej) przedstawia metodę generowania nierówności Bella dla $N+1$ partnerów w oparciu o nierówności dla N partnerów. Polega ona na działaniu na wektor pomiarów pozostających w dyspozycji jednego z obserwatorów macierzą przekształcającą go w pewien wektor w przestrzeni iloczynów pomiarów dla dwóch obserwatorów. Dla ilustracji możemy zapisać wyprowadzenie nierówności CHSH:

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_1 \\ B_2 & -B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(A_1 + A_2) \\ B_2(A_1 - A_2) \end{pmatrix},$$

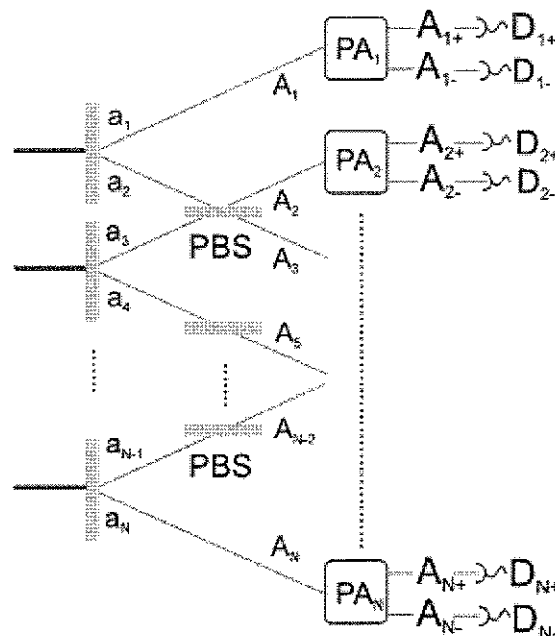
co po przemnożeniu lewostronnie przez (1,1) daje wyrażenie pod średnią w nierówności (1). Można na przykład wygenerować całą rodzinę nierówności MABK [21]. Artykuł stanowi przyczynek do rozwiązania problemu generowania zbioru nierówności przyległych, gdyż przekształca nierówności przyległe w inne nierówności przyległe. Metoda rozszerzania jest nietrywialna w tym sensie, że pozwala na generację nierówności, które są łamane silniej, niż te, od których zaczęliśmy.

W pracy [W2] podejmujemy tematykę fundamentalnych niedoskonałości eksperymentów z zakresu optyki i informacji kwantowej. Współcześnie ogromna większość doświadczeń ze splątanymi parami fotonów wykorzystuje proces parametrycznej konwersji ku niższym częstotliwościom. Jest to proces zachodzący w kryształach nieliniowych, który przekształca jeden wysokoenergetyczny foton

w dwa, których częstotści sumują się w przybliżeniu do częstotści oryginalnej. Tak powstała para fotonów może być skorelowana w polaryzacji, położeniu, pędzie, czasie i częstotliwości. My skupiamy się na korelacjach w polaryzacji i czasowych w układach doświadczalnych, w których generowanych jest kilka par naraz. Po pierwsze badamy strukturę szumu wynikającego z niepożądaney emisji dodatkowych par w układach generujących stany GHZ,

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0 \dots 0\rangle + |1 \dots 1\rangle).$$

Przy niewydajnych detektorach część fotonów stanu może nie wywołać ich reakcji, którą z kolei wywołają fotony z dodatkowych par. Dla układu wykorzystującego pojedynczą parę obserwujemy domieszkę białego szumu, czyli równą mieszaninę wszystkich stanów. Jednak przy większej ilości obserwatorów szum wykazuje korelacje zależne od poziomu pompowania. W zastosowaniach praktycznych konieczne jest więc znalezienie kompromisu pomiędzy wydajnością układu produkującego dany stan, a jakością tego stanu. Ponadto, ponieważ impuls pompujący kryształ nieliniowy jest rozciągli w czasie, obserwujemy pewne rozmycie czasowe par splątanych fotonów, czyli pewien przedział, w którym zaszła parametryczna konwersja. Jako, że każda para ma silne korelacje czasowe, prowadzi to do częściowej rozróżnialności poszczególnych par, a zatem osłabia interferencję. Dla obu efektów wyliczamy ograniczenia na kontrast interferencji wielofotonowej, które określają granicę łamania nierówności Bella.



Rysunek 1 (Z pracy [W2]): Układ pomiarowy analizowany w pracy [W2]. Każdy z nieliniowych kryształów (szare prostokąty) pompowany jest wiązką lasera, co powoduje powstawanie par fotonów splątanych w polaryzacji. Pary te propagują się w modach a_i , a część z nich jest ze sobą sprzężona przy pomocy polaryzacyjnych dzielników światła (PBS). Następnie mody A_i są badane przy pomocy analizatorów polaryzacji PA_j i detektorów $D_{j+/-}$.

Jak już wspomniałem powyżej, rozgraniczenie pomiędzy statystykami dającymi się opisać teoriami ze szczególnymi typami zmiennych ukrytych, a tymi niepodlegającymi takiemu opisowi (czysto kwantowymi) dotyczy nie tylko zbioru podukładów kwantowych, ale także pojedynczych układów opisanych przestrzenią Hilberta o wymiarze większym, niż trzy. W pierwszym przypadku dodatkowym warunkiem jest lokalność, w drugim żądamy po prostu niekontekstualności. Zakładamy, że zmienna ukryta przypisuje pomiarowi jego wynik niezależnie od sposobu, w który ten pomiar przeprowadzamy. W szczególności, nie zależy od tego, jaki inny pomiar jest jednocześnie przeprowadzany, o ile oba pomiary są ze sobą kompatybilne. Praca [W3] opisuje eksperyment falsyfikujący teorię z niekontekstualnymi zmiennymi ukrytymi oparty na nierówności pięciokąta [22],

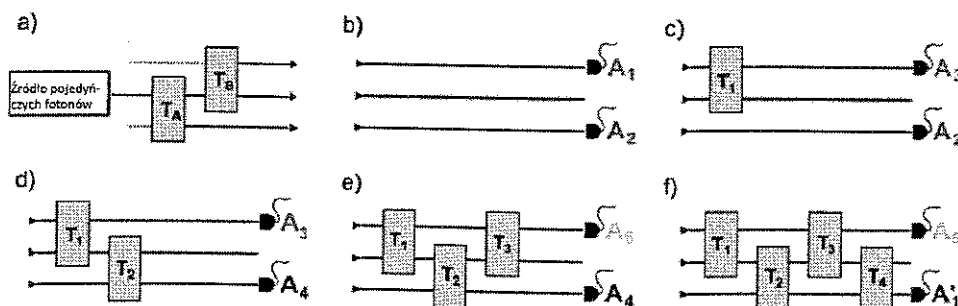
$$\langle A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + A_5 A_1 \rangle_{NCHV} \geq -3, (2)$$

gdzie A_i to pomiary na układzie trójpoziomowym z wynikami ± 1 , (przy czym $+1$ pojawia się dwukrotnie), takimi, że każdy człon zawiera parę pomiarów kompatybilnych. Istotną cechą tej nierówności jest to, że jest ona reprezentowana przez wielokąt. To pozwoliło określić koncept eksperymentu, w którym ten sam pomiar jest zawsze realizowany przy pomocy tego samego urządzenia. Jest to ważne, gdyż ze względu na niedokładności, nie mamy żadnej pewności, że inne urządzenie, choćby zbudowane w ten sam sposób, mierzy tę samą wielkość. Jedynym wyjątkiem jest sytuacja, w której, by zamknąć pięciokąt, musimy wrócić do pierwszego pomiaru. Stosując technikę blokowania modów, określamy prawdopodobieństwa warunkowe mówiące, jak bardzo ostateczne urządzenie pomiarowe odbiega od pierwotnego. Wiąże się to z wprowadzeniem poprawki do nierówności (2), która kwantyfikuje tę zmianę,

$$\langle A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + A_5 A'_1 \rangle_{NCHV} - \overline{A_1 A'_1} \geq -4,$$

$$\overline{A_1 A'_1} = \sum_{j,k=\pm 1} jk P(A_1 = j) P(A'_1 = k | A_1 = j)$$

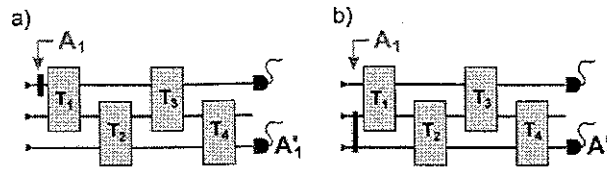
Warto podkreślić, że był to pierwszy eksperyment nad niekontekstualnością z użyciem układu trójpoziomowego. Początkowo był on krytykowany, gdyż w przeciwieństwie do niektórych wcześniejszych prac [23-26], opierał się on na teście zależnym od stanu układu. Ostatecznie jednak, nasz eksperyment zainspirował dalsze badania nad nierównością wielokąta, n.p. artykuły [27,28]



Rys. 2 (z pracy [W3]): Schemat doświadczenia nad nierównością pięciokąta.

a) przygotowujemy pojedynczy foton w stanie, który będzie łamał nierówność, b)-f) włączając kolejne transformacje dwóch modów (w rzeczywistości, przedstawiając kolejne płytki fazowe) realizujemy kolejne pary pomiarów

występujące w nierówności. Reakcja poszczególnych detektorów oznacza zarejestrowanie $A_i = -1$.



Rys. 3 (z pracy [W3]): dodatkowe etapy pozwalające oszacować różnicę pomiędzy pomiarami A_i i A'_i . Poprzez blokowanie danych modów wejściowych ustalamy wynik pomiaru A_i (gdyby udało się go przeprowadzić bez zniszczenia fotonu przy pomocy metod nagrodzonych nagrodą Nobla z fizyki za rok 2012) i prawdopodobieństwa warunkowe. Statystyki wyników dla A_i ustalamy na etapie b) na poprzednim rysunku.

Jednym ze sposobów opisu stanu wielu kubitów (układów dwupoziomowych) jest tensor korelacji. Jest to tablica wartości średnich produktów tensorowych macierzy Pauliego (łącznie z lokalną macierzą jedynkową) w danym stanie,

$$T_{ij\dots} = \text{Tr} \rho(\sigma_i \otimes \sigma_j \dots),$$

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{i,j,\dots=0} T_{ij\dots} \sigma_i \otimes \sigma_j \dots$$

Zbiór takich produktów stanowi bazę ortonormalną w przestrzeni operatorów w sensie śladowego iloczynu skalarnego. Dwa takie produkty komutują ze sobą, jeśli różnią się na parzystej ilości pozycji, a w przeciwnym razie antykomutują. W pracy [W4] definiujemy uogólnienie tych cech. Dwa produkty antykomutują ze sobą ze względu na dany podział na podukłady jeśli ich fragmenty działające na co najmniej jeden z podukładów ze sobą antykomutują. W przeciwnym wypadku mówimy, że komutują ze sobą względem cięcia. Pokazujemy, że suma kwadratów elementów tensora korelacji nie może przekroczyć 1 jeśli odpowiednie operatory ze sobą antykomutują. Podobnie, taka suma nie przekracza 1 dla stanów separowalnych względem podziału jeśli odpowiednie operatory antykomutują względem tego cięcia. Korzystając z tych własności i nieujemności operatora gęstości (stanu) rozpoznajemy strukturę liniową kwadratów elementów tensora korelacji. Pokazujemy, że suma ważona tych kwadratów jest ograniczona z góry w zależności od klasy separowalności, do której stan należy. Co istotne, ograniczenia te nie są znajdowane poprzez optymalizację po wszystkich stanach separowalnych, ale z grafów właściwości komutacyjnych operatorów, po kwadratach których sumujemy. Pozwala to na prostą konstrukcję wielu kryteriów splątania o dużym stopniu ogólności. Choć otrzymane w ten sposób kryteria splątania przypominają te otrzymane w pracy [29], różni je metoda znajdowania ograniczeń dla stanów separowalnych.

Praca [W5] uogólnia metodę wyprowadzania nierówności Bella podaną przez Wernera i Wolfa [30], Weinfurtera i Żukowskiego [31] i Żukowskiego i Bruknera [32] (znane jako nierówności WWWŻB). Nowa metoda pozwala na

wyprowadzenie wielu nierówności wykorzystujących korelacje niższego rzędu pomiędzy podzbiorami obserwowanych kubitów. Dzięki temu mamy większą dowolność doboru obserwowanego splątania. Nierówności WWWŻB wyprowadzone są przez wspólne oszacowanie wszystkich produktów sum i różnic par lokalnych obserwabli, wysumowanych ze współczynnikami ± 1 . Zilustrujmy tę metodę przypadkiem dla trzech kubitów. Dla dowolnej funkcji znaku $S(a, b, c) = \pm 1$ ($a, b, c = 1$) mamy dla teorii z lokalnymi zmiennymi ukrytymi

$$\sum_{a,b,c=\pm 1} S(a, b, c) \langle (A_1 + aA_2)(B_1 + bB_2)(C_1 + cC_2) \rangle_{LHV} \leq 2^3, (3)$$

gdyż dla dowolnej kombinacji wyników zawsze tylko jeden człon ma niezerową wartość. Wyprowadzenie nowych nierówności Bella polega na zastąpieniu w nierówności (3) dwóch członów różniących się między sobą pojedynczym znakiem wspólnym członem z korelacjami niższego rzędu, na przykład

$$(A_1 + A_2)(B_1 + B_2)(C_1 \pm C_2) \rightarrow 2(A_1 + A_2)(B_1 + B_2).$$

Ograniczenie lokalnie realistyczne pozostaje niezmienione, gdyż nowy człon ma w deterministycznych teoriach lokalnie realistycznych wartość ± 8 wtedy i tylko wtedy, gdy pozostałe znikają, w przeciwnym wypadku równy jest on zero. Powtarzając ten zabieg wiele razy dostajemy ogromną ilość nowych wyrażeń typu Bella. Podajemy też warunek konieczny, który musi spełniać stan, by łamał nowe nierówności. Prace [W4] i [W5] razem pokazują przykład detekcji prawdziwego pięciocząstkowego splątania bez pięciocząstkowych korelacji. Metoda ta pozwala nawet na wyprowadzenie nietrywialnych nierówności Bella, które nie są łamane przez żaden stan [33].

Wydawałoby się, że skoro twierdzenie Kochena-Speckera falsyfikuje modele z niekontekstualnymi zmiennymi ukrytymi dla kubitów (układów trójpoziomowych), nie ma potrzeby twierdzenia Bella dla zbiorów takich układów. Jednak bliższa analiza problemu pokazuje sytuacje, w których konstrukcja twierdzenia Bella jest uzasadniona. Takim przypadkiem jest sytuacja, w której z lokalnych obserwabli nie da się skonstruować testu niekontekstualności, a zatem lokalnie mogą istnieć modele kontekstualne. Praca [W6] przedstawia nierówności typu Bella dla dowolnej liczby kubitów, w których nie da się skonstruować argumentu Kochena-Speckera dla żadnego lokalnego układu, a jednak globalnie falsyfikujemy modele lokalnie realistyczne. Jako obserwabli używamy kwadratów rzutów spinu, a ze względu na ich rozkład, nierówności nazywamy stożkowymi. Ich konstrukcja jest analogiczna do tych opisanych w pracy [W10] (poniżej). Podajemy oszacowania siły łamania tych nierówności w zależności od liczby ustawień i podukładów.

Praca [W7] prezentuje przypadek wzajemnej niekompatybilności istniejących modeli lokalnie realistycznych. Podajemy przykład stanu pięciu kubitów, który posiada jedynie dwu- i czterocząstkowe korelacje. Stanem tym jest mieszanina stanów Dicke'go z dwoma i trzema wzbudzeniami. Żadna nierówność Bella nie jest łamana dla zredukowanych stanów dwukubitowych, a także żadna nierówność z dwoma ustawieniami po każdej stronie nie jest łamana dla czterech

kubitów. Stan łamie jednak pewną nierówność Bella dla pięciu kubitów z dwoma ustawieniami po każdej stronie. Zatem modeli ze lokalnymi zmiennymi ukrytymi istniejących dla stanów zredukowanych nie da się ze sobą pogodzić. Dodatkowo, nierówność ta nie należy do żadnej znanej dotąd rodziny.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

a) Zestawienie pozostałych publikacji naukowych

[W8] Caslav Brukner, Marek Żukowski, Wiesław Laskowski, Marcin Wieśniak, *Do all pure entangled states violate Bell inequalities for correlation functions*, *Physical Review Letters* **88**, 210402, 2002.

[W9] Aditi Sen (De), Ujjwal Sen, Dagomir Kaszlikowski, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, *Multiqubit W states lead to stronger nonclassicality than Greenberger-Horne-Zeilinger states*, *Physical Review A* **68**, 062306, 2003.

[W10] Koji Nagata, Wiesław Laskowski, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, *Rotational invariance as an additional constraint on local realism*, *Physical Review Letters* **93**, 230403, 2004.

[W11] Marcin Wieśniak, Caslav Brukner, Vlatko Vedral, *Macroscopic susceptibility as a macroscopic entanglement witness*, *New Journal of Physics* **7**, 258, 2006.

[W12] Marcin Wieśniak, Piotr Badziąg, Marek Żukowski, *Explicit form of correlation-function three-setting tight Bell inequalities for three qubits*, *Physical Review A* **76**, 012110, 2008.

[W13] Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, *Analysis of critical parameters in the scheme of Bjork, Jonsson, and Sanchez-Soto*, *Physics Letters A* **372**, 1783-1788, 2008.

[W14] Marcin Wieśniak, Caslav Brukner, Vlatko Vedral, *Heat capacity as an indicator of entanglement*, *Physical Review B* **78**, 064108, 2008.

DOROBK PO DOKTORACIE

[W15] Ravishankar Ramanathan, Dagomir Kaszlikowski, Marcin Wieśniak, Vlatko Vedral, *The entanglement in resonating doped valence bound states*, *Physical Review B* **78**, 224513, 2008.

[W16] Marcin Wieśniak, *Heisenberg chains cannot mirror a state*, *Physical Review A* **78**, 052334, 2008.

[W17] Marcin Markiewicz, Marcin Wieśniak, *Perfect state transfer without state initialization and remote collaboration*, *Physical Review A* **79**, 054304, 2009.

[W18] Magnus Radmark, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, Mohamed Bourennane, *Experimental filtering of two-, four-, and six-photon singlets from single PDC source*, *Physical Review A*, **80** 040302, 2009.

[W19] Marcin Markiewicz, Marcin Wieśniak, *One-qubit and two-qubit codes in noisy state transfer*, *Open Systems and Information Dynamics* **17**, 121-133, 2010.

[W20] Marcin Wieśniak, Marcin Markiewicz, *Finding traps in non-linear spin arrays*, *Physical Review A* **81**, 032340, 2010.

[W21] Marcin Wieśniak, Tomasz Paterek, Anton Zeilinger, *Entanglement in mutually unbiased bases*, *New Journal of Physics* **13**, 053047, 2011.

[W22] Magdalena Stobińska, Wiesław Laskowski, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, *Multi-photon quantum interference with high visibility using multiport beam splitters*, *Physical Review A* **87**, 053828, 2013.

[W23] Elias Amelsen, Mohamed Bourennane, Carlo Burdoni, Otfried Guehne, Matthias Keinmann, Jan-Ake Larson, Marcin Wieśniak, *Comment on „State-independent experimental test of quantum contextuality in an indivisible system”*, *Physical Review Letters* **110**, 078901, 2013.

[W24] Magnus Radmark, Marcin Wieśniak, Marek Żukowski, Mohamed Bourennane, *Experimental Multi-location Remote State Preparation*, *Physical Review A* **88**, 032304, 2013.

- b) Omówienie najważniejszych kierunków badań i wyników nieujętych w osiągnięciu.

1. Rozwinięcie teorii twierdzenia Bella

Praca [W8] przedstawia dowód, że nie wszystkie splątane stany czyste łamią nierówności Bella dla korelacji pomiędzy wszystkimi kubitami z dwoma ustawieniami po każdej stronie. Wynik ten był istotnym czynnikiem motywującym badania nad nierównościami z wieloma ustawieniami.

Praca [W9] opisuje protokół polegający na lokalnych projekcjach zaszumionych białym szumem stanów typu W. Każda taka projekcja prowadzi do wzmocnienia domieszki stanu splątanego. W efekcie dla dostatecznie dużej ilości kubitów łamanie nierówności Bella jest możliwe przy wyższym poziomie szumu dla stanów W, niż silnie nieklasycznych GHZ. W rzeczywistości wynik ten jest argumentem przeciw odporności na biały szum jako miary nieklasyczności.

W pracy [W10] prezentujemy nowe nierówności Bella wykorzystujące ciągle zbiór ustawień dla dowolnej liczby kubitów. Można to interpretować jako wymóg, by lokalne modele realistyczne były niezmiennicze względem obrotów, gdyż w przeciwieństwie do oryginalnych wersji twierdzenia Bella zbiór użytych ustawień pomiarowych ma symetrię względem obrotów. Nierówności te są powyżej pewnej liczby cząstek łamane silniej przez stany GHZ, niż standardowe nierówności WWWŻB (wspomniane przy okazji pracy [W5]). Metody z tej pracy zostały wykorzystane w pracy [W6].

W pracy [W12] przedstawiliśmy metodę konstrukcji przyległych nierówności Bella dla większej ilości lokalnych obserwabl. Najpierw rozważamy wszystkie prowadzące do nich kombinacje pomiarów lokalnych,

następnie te kombinacje składamy w bloki obserwabli dwucząstkowych, itd. Metoda jest zilustrowana podaniem wszystkich przyległych nierówności Bella dla funkcji korelacji dla trzech kubitów i najwyżej trzech lokalnych pomiarów.

2. Splątanie a termodynamika dużych układów spinów

W pracy [W11] pokazujemy, że niskie wartości podatności magnetycznej mogą świadczyć o obecności splątania. Warunkiem jest Hamiltonian niezmienniczy względem obrotów. Wówczas podatność magnetyczna jest proporcjonalna do kwadratu wielkości całkowitego momentu pędu, a jego niskie wartości wymagają splątania pomiędzy spinami tworzącymi dane ciało. Nie sposób jednak na tej podstawie orzec, jaki rodzaj splątania występuje w danym ciele -- dwu-, czy wielocząstkowe.

Praca [W14] wykazuje związek pomiędzy splątaniem w dużych układach kwantowych, a III prawem termodynamiki. Wymaga ono, by pojemność cieplna ciała dążyła do 0 wraz z temperaturą. Dla układów bez przerwy energetycznej energia wewnętrzna jest funkcją wielomianową temperatury, a dla układów z przerwą-iloczynem jednomianu i funkcji wykładniczej odwrotności temperatury. W obu przypadkach ciepło właściwe dla niskich temperatur daje się w przybliżeniu wyrazić jako funkcję energii wewnętrznej i temperatury. Korzystając z minimalnej energii dla stanów produktowych udaje się oszacować krytyczną wartość ciepła właściwego, poniżej której stan Gibbsa musi być splątany.

Jedną z metod przybliżonego rozwiązywania problemów dużych układów spinów jest metoda rezonujących stanów walencyjnych. Krawędzie grafów oddziałujących spinów pokrywa się dwucząstkowymi stanami singletowymi, a następnie superporonuje się wszystkie takie pokrycia. Pozwala to na oszacowanie właściwości stanu podstawowego. W pracy [W15] badamy czy takie pokrycia małych siatek grafów spełniają powierzchniowe prawa splątania, t.j. czy ilość splątania w wydzielonym obszarze jest proporcjonalna do obwodu tego obszaru.

3. Zagadnienia informacyjno-optyczne.

Jednym z zagadnień występujących w optyce kwantowej jest kwestia splątania pojedynczego fotonu. Wprawdzie za dzielnikiem światła jest on w zdelokalizowanej superpozycji stanów klasycznie rozróżnialnych, jednak by skorzystać z koherencji tego stanu, wszyscy obserwatorzy muszą mieć wspólny „kwantowy układ odniesienia”, stan koherentny, do którego fazy mogą odnieść pomiary stanu pojedynczego fotonu. Schemat takiego doświadczenia typu Bella przedstawili Bjork, Jonsson i Sanchez-Soto [34], a w

pracy [W13] przedstawiamy analizę niektórych warunków, jakie musi spełniać w tym schemacie układ pomiarowy. Uwagę zwraca niska minimalna wydajność detektorów, jedynie około 17%.

W pracy [W18] demonstrujemy doświadczalnie wielokrotną emisję par splątanych fotonów z pojedynczego kryształu nieliniowego. W efekcie dostajemy wielofotonowe stany singletowe. Praca zawiera również teoretyczne ograniczenia na jakość otrzymanych stanów z powodu częściowej rozróżnialności splątanych par (tematyka zbieżna z pracą [W2]).

Fundamentalne problemy omawiane w pracach [W2] i [W18] rosną wraz ze średnią ilością emitowanych par. Praca [W22] sugeruje metodę poprawy kontrastu interferencji dla bardzo wysokich mocy wiązki pompujących kryształ nieliniowy w eksperymentach z dwoma obserwatorami. Sugerujemy rozszczepienie modów sygnałów wyjściowych na multiportach (elementach optycznych rozdzielających wiązkę na wiele modów), za którymi znajdują się matryce detektorów. Proponujemy uwzględniać tylko te zdarzenia, w których zaobserwowaliśmy detekcje w pojedynczych detektorach po każdej stronie. Główny przyczynek do takich zdarzeń pochodzi z przypadku emisji pojedynczej pary, co wiąże się z wysokim kontrastem interferometrycznym.

W pracy [W24] używamy układu doświadczalnego z pracy [W18], pojedynczego źródła emitującego wiele par splątanych fotonów naraz, które następnie padają na dzielniki światła. Pokazujemy, że taki układ może służyć do zdalnego przygotowywania stanów wielocząstkowych. Alicja otrzymuje do trzech fotonów, a jej partnerzy – Bob, Charlie i David – po jednym. Alicja dokonuje lokalnych pomiarów polaryzacji jej fotonów. Zależnie od wyboru pomiarów i otrzymanych wyników, Bob, Charlie i David dzielą pewien stan, który może być splątany. Wśród stanów, które możemy przygotować, są stany GHZ i W.

4. Dynamika informacji kwantowej w układach spinów

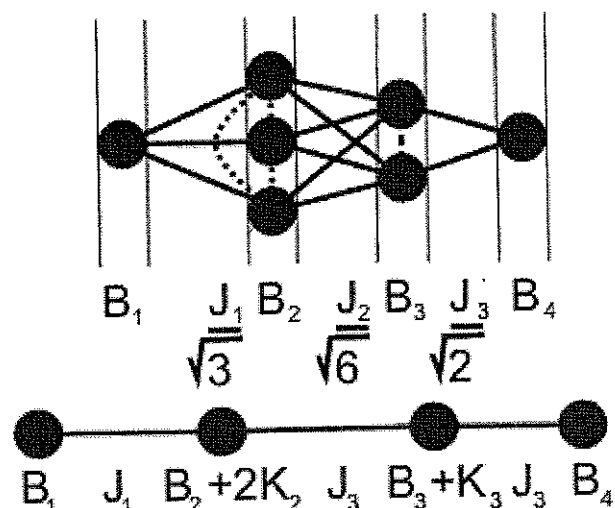
W pierwszej dekadzie XXI wieku pojawiła się koncepcja przesyłania stanów kwantowych przez łańcuchy spinów nie poprzez sekwencyjne operacje, ale poprzez swobodną dynamikę Hamiltonowską [35]. Ostatecznie znaleziono układy naturalnie „odbijające” stan zainicjowany na jednym końcu na drugi koniec [36]. Praca [W16] pokazuje, że takim układem nie może być łańcuch spinów-1/2 z oddziaływaniem Heisenberga bez lokalnych pól magnetycznych. Prezentuję dowód, że zjawisko takie nie zachodzi dla pojedynczych wzbudzeń, co wystarcza do stwierdzenia, że nie zachodzi ono w ogólności. Wymagania, by podprzestrzeń stanów symetrycznych względem odbicia od środka łańcucha była związana tylko z parzystymi wartościami własnymi Hamiltonianu, a

przestrzeń stanów anty-symetrycznych – tylko z nieparzystymi, okazują się sprzeczne.

Ważnym wynikiem było pokazanie, że przesłanie stanu kwantowego przez przewód kwantowy (łańcuch spinów) nie wymaga inicjalizacji stanu całego łańcucha [37]. W pracy [W17] idziemy o krok dalej, pokazując, że przy użyciu łańcuchów spinów-1/2 z oddziaływaniem typu xx można przesłać stan kwantowy bez inicjacji stanu całego łańcucha, a także bez zsynchronizowanych akcji nadawcy i odbiorcy.

Praca [W19] opisuje numeryczne porównanie dwóch metod kodowania informacji w przewodzie kwantowym w obecności różnych szumów. Stan kubitu, który chcemy przesłać możemy zapisać jako superpozycję dwóch stanów pojedynczego spinu lub jako superpozycję obrotów dwóch sąsiadujących spinów. Okazuje się że, kodowanie jednego kubitu logicznego w dwa kubity fizyczne może być bardziej odporne na pewne rodzaje szumu, niż kodowanie jednokubitowe, jednak ten drugi rodzaj kodu wykazał we wszystkich badanych przypadkach większą odporność na szумы przy średniej wartości wierności przesłanego stanu wyższej, niż granica klasyczna, $2/3$.

Kolejnym zagadnieniem teorii dynamiki informacji była zdalna tomografia łańcucha. Chodziło o ustalenie wielkości charakteryzujących przewód kwantowy (poszczególne stałe sprzężenia, lokalne pole magnetyczne, i.t.d.) korzystając jedynie z dostępu do skrajnych spinów. Metody takiej tomografii były zaproponowane bez inicjalizacji stanu łańcucha – dla oddziaływań typu xx [38], jak również dla oddziaływań typu xxz – wymagające inicjalizacji stanu łańcucha [39]. Praca [W20] kombinuje te dwie metody. Zakładamy, że użytkownik ma dostęp do końców łańcucha, ale w podczas jego produkcji możliwe było przypadkowych rozmieszczenie kilku spinów zamiast jednego. Taka wada nie musi powodować kłopotów przy komunikacji jednostronnej i niskiej temperaturze otoczenia, nabiera jednak znaczenia, na przykład, podczas próby komunikacji dwukierunkowej. Dzięki metodzie zaprezentowanej w pracy [W20] możemy oszacować ile spinów znajduje się w danym bloku układu i jak silne jest oddziaływanie między nimi.



Rys. 4 (z pracy [W20]): przykład układu spinów, który można badać metodami przedstawionymi w pracy [W20]. Literą B oznaczamy lokalne pola magnetyczne, wartości J_i opisują oddziaływanie (typu xx) pomiędzy spinami w różnych blokach. Linia kropkowana to oddziaływanie wewnątrz drugiego bloku o sile K_2 , a przerywana – w trzecim bloku o sile K_3 . Poniżej: taka liniowa struktura tego układu wynikałaby z zastosowania jedynie metody opisanej w pracy [39].

5. Splątanie w bazach wzajemnie zbalansowanych.

Zjawiskiem kluczowym dla rozwoju fizyki teoretycznej jest symetria. W przestrzeni Hilberta szczególną formą symetrii są bazy wzajemnie zbalansowane (mutually unbiased bases), które cechują się tym, że dwa wektory z dwóch różnych baz wzajemnie zbalansowanych mają stały moduł iloczynu skalarnego. Pozwala to na efektywną tomografię stanów kwantowych. Z obliczeń informacyjnych wynika, że w wymiarze d może istnieć co najwyżej $d+1$ takich baz. O ile znamy pełne zbiory baz wzajemnie zbalansowanych dla liczb pierwszych [40] i ich potęg [41], o tyle dla innych liczb złożonych poszukiwania zbiorów kompletnych nadal kończą się fiaskiem, choć nie ma też dowodu, że nie mogą one istnieć. W pracy [W21] pokazujemy, że dowolny kompletny zbiór baz wzajemnie zbalansowanych w wymiarze niepierwszym, niezależnie od reprezentacji, musi zawierać określoną ilość splątania, zależną od wymiarów podukładów. Za kwantyfikator splątania przyjęliśmy sumę po wszystkich stanach ze wszystkich baz śladu kwadratów stanów zredukowanych. Tego typu wartości mają tę samą średnią liczoną po wszystkich elementach kompletnego zbioru baz wzajemnie zbalansowanych i po wszystkich stanach czystych. Pokazujemy też, że niektóre wybory dwóch pierwszych baz wzajemnie zbalansowanych z góry blokują konstrukcję zbioru kompletnego. Wyniki te mogą mieć znaczenie dla pokazania (nie)istnienia kompletnych zbiorów takich baz dla wymiarów będących liczbami złożonymi.

c) Trwające projekty i dalsze plany.

Obecnie działam w ramach kilku projektów, częściowo także o charakterze doświadczalnych. W ramach konsorcjum BRISQ2 współpracuję z prof. M. Chekhovą z Uniwersytetu Erlangen i Instytutu Badań nad Światłem im. Maxa Plancka nad metodami detekcji splątania w jasnych stanach ściśniętej próżni. Grupa prof. H. Weinfurtera z Uniwersytetu Ludwika Maksymiliana w Monachium i Instytutu Optyki Kwantowej im. Maxa Plancka w Garching pracuje obecnie między innym nad eksperymentem mojego pomysłu wykorzystującym metody z pracy [W4] w celu pokazania prawdziwego splątania czterocząstkowego jedynie w dwóch fizycznych pomiarach. Z grupą prof. M. Bourennane z Uniwersytetu Sztokholmskiego pracujemy nad eksperymentem w którym zrealizujemy kwantowy protokół rozwiązujący problem anonimowego weta (każdy głosujący może zgłosić weto do podejmowanej decyzji, ale jego tożsamość pozostaje nieujawniona). Jest to po części owoc prac nad uogólnieniem paradoksu Hardy'ego, które dobiegają końca w Gdańsku (we współpracy z dr Ramijem Rahamanem i prof. Markiem Żukowskim, trwa post-produkcja tego manuskryptu). Trwają również prace nad nierównościami Bella z wieloma ustawieniami, co zostało zadeklarowane w projekcie Homing Plus przyznanym mi przez Fundację na Rzecz Nauki Polskiej.

W ostatnich latach dziedzina, którą się zajmuję, rozwija się w dwóch kierunkach. Po pierwsze, obserwujemy bardzo dynamiczny rozwój teorii informacji, już nie związanej z mechaniką kwantową, a traktowanej jako osobny zasób fizyczny. Z drugiej strony obserwujemy powolny, ale sukcesywny rozwój technik doświadczalnych pozwalający na coraz wierniejszą realizację kwantowych protokołów. Uważam, że w niedalekiej przyszłości nadal warto zajmować się aspektami twierdzenia Bella. Po pierwsze generowanie nowych nierówności Bella i metod detekcji splątania jest nadal otwartym i fascynującym problemem. Nadal brakuje narzędzi segregujących stany splątane według klas splątania, do których należą, a nawet nie jest jasne czy poszczególne klasy splątania są addytywne, t.zn. czy możemy określić, że, np., dany stan trykubitowy zawiera x bitów splątania, z czego y bitów to splątanie typu W , podczas gdy $x-y$ to splątanie typu GHZ . Po drugie, nadal wiele protokołów przetwarzania informacji nie doczekało się jeszcze swoich wersji kwantowych, a rozwój techniki optyki kwantowej pozwala na realizację coraz ambitniejszych schematów kwantowych. Ponadto w moim kręgu zainteresowań pozostają problemy dynamiki informacji w układach spinów, jako alternatywna technologia mogąca w przyszłości znaleźć zastosowanie w ciałostalowych komputerach kwantowych.

Bibliografia

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Physical Review* 7, 229, 1935.

- [2] D. Bohm, 1952, *Physical Review* **85**, 166; 180, 1952.
- [3] A. M. Gleason, *Journal of Mathematical Mechanics* **6**, 885, 1957.
- [4] S. Kochen, E. P. Specker, *Journal of Mathematical Mechanics* **17**, 57, 1967.
- [5] J. S. Bell, *Physics (Long Island City, N. Y.)* **1**, 195, 1964.
- [6] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Physical Review Letters* **23**, 880, 1969.
- [7] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Physical Review Letters* **49**, 1804, 1982.
- [8] M. A. Rowe *et al.*, *Nature* **409**, 791, 2001.
- [9] T. Schneidl *et al.*, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **107**, 46, 2010.
- [10] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Physical Review Letters* **80**, 5239, 1998.
- [11] P. Horodecki, 1997, *Physics Letters A* **232**, 333, 1997.
- [12] W. Dur, G. Vidal, J. I. Cirac, *Physical Review A* **62**, 062314, 2000.
- [13] C. H. Bennett, G. Brassard, *Proceedings of the IEEE International Conference of Computers, Systems, and Signal Processing, IEEE (New York)*, 157, 1984.
- [14] D. Deutsch R. Jozsa, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A* **439**, 553, 1992.
- [15] P. W. Shor, *Proceedings of the 35th Symposium on Foundations of Computational Sciences*, 1994.
- [16] L. Grover, *Proceedings of the 28th Symposium on Theoretical Computation*, 212, 1996.
- [17] C. H. Bennett *et al.*, *Physical Review Letters* **70**, 1895, 1993.
- [18] C. Brukner, M. Żukowski, J.-W. Pan, A. Zeilinger, *Physical Review Letters* **92**, 127901, 2004
- [19] A. Se (De), U. Sen, M. Żukowski, *Physical Review A*, **68** 032309, 2003.
- [20] I. Pitowski, *Quantum Logic, Lecture Notes in Physics* **321**, 1989; *Mathematical Programming* **50**, 1991.
- [21] A. W. Beliński, D. N. Kłyszko, *Physics Uspekhi*, **36** 653, 1993.
- [22] A. A. Kliaczko, M. Ali Can, S. Biniocioglu, A. S. Szumowski, *Physical Review Letters* **101**, 020403, 2008.
- [23] A. Peres, *Physics Letters A* **151**, 107 (1990); D. N. Mermin, *Physical Review Letter* **65**, 3373 (1990).
- [24] G. Kirchman *et al.*, *Nature* **460**, 494 (2009).
- [25] H. Bartosik *et al.*, *Physical Review Letters* **103**, 040403 (2009).
- [26] E. Amselen, M. Radmark, M. Bourennane, A. Cabello, *Physical Review Letters* **103**, 160405 (2010)
- [27] A. Cabello *et al.*, *Physical Review A* **85**, 032108 (2012)
- [28] P. Badziąg *et al.*, *Foundations of Physics* **41**, 41 (2011).
- [29] P. Badziąg, C. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, *Physical Review Letters* **100**, 140403, 2008.
- [30] R. F. Werner, M. M. Wolf, *Physical Review A* **64**, 032112, 2001.
- [31] H. Weinfurter, M. Żukowski, *Physical Review A* **64**, 010102(R), 2001.
- [32] M. Żukowski, C. Brukner, 2002, *Physical Review Letters* **88**, 210401, 2002.
- [33] M. A. Almeida *et al.*, *Physical Review Letters* **104**, 230404, 2010.
- [34] G. Bjork, P. Jonsson, L. L. Sanchez-Soto, *Physical Review A* **64**, 042106, 2001.

- [35] S. Bose, *Physical Review Letters* **91**, 207901, 2003.
- [36] M. Christandl, N. Datta, A. Ekert, A. J. Landahl, *Physical Review Letters* **92**, 187902, 2004.
- [37] C. Di Franco, M. Paternostro, M. S. Kim, *Physical Review Letters* **101**, 230502, 2008.
- [38] C. Di Franco, M. Paternostro, M. S. Kim, *Physical Review Letters* **102**, 187203, 2009.
- [39] D. Burgarth, K. Maruyama, F. Nori, *Physical Review A* **79**, 020505(R), 2009.
- [40] D. Ivanović, *Journal of Physics A* **14**, 3241, 1981.
- [41] W. Wootters, B. D. Fields, *Annals of Physics (Nowy Jork)* **191**, 363, 1989.

