

Wiesław Laskowski

Autoreferat

Załącznik do wniosku o przeprowadzenie postępowania habilitacyjnego na podstawie jednotematycznego cyklu publikacji pt.: *Wykrywanie, analiza i charakteryzacja nieklasycznych własności stanów kwantowych. Teoria dla eksperymentu.*

Gdańsk 2013

I. IMIĘ I NAZWISKO

Wiesław Laskowski

II. POSIADANE DYPLOMY, STOPNIE NAUKOWE/ARTYSTYCZNE – Z PODANIEM NAZWY, MIEJSCA I ROKU ICH UZYSKANIA ORAZ TYTUŁU ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Stopień doktora nauk fizycznych nadany przez Radę Wydziału Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Gdańskiego w dniu 22.11.2007 roku.

Tytuł rozprawy doktorskiej: “Nieklasyczne korelacje układów złożonych z wielu kubitów”.

III. INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH/ARTYSTYCZNYCH

- 17.01.2007 - 29.02.2008: Starszy referent techniczny w Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki Uniwersytetu Gdańskiego (praca w ramach projektu naukowego)
- od 01.03.2008: Adiunkt w Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki Uniwersytetu Gdańskiego

IV. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA WYNIKAJĄCEGO Z ART. 16 UST. 2 USTAWY Z DNIA 14 MARCA 2003 R. O STOPNIACH NAUKOWYCH I TYTULE NAUKOWYM ORAZ O STOPNIACH I TYTULE W ZAKRESIE SZTUKI (DZ. U. NR 65, POZ. 595 ZE ZM.)

A. tytuł osiągnięcia naukowego/artystycznego

Jednotematyczny cykl publikacji pt. *Wykrywanie, analiza i charakteryzacja nieklasycznych własności stanów kwantowych. Teoria dla eksperymentu.*

B. autor/autorzy, tytuł/tytuły publikacji, rok wydania, nazwa wydawnictwa

1. P. Badziąg, Č. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, *Experimentally friendly geometrical criteria for entanglement*, Phys. Rev. Lett. 100, 140403 (2008).
2. W. Laskowski, T. Paterek, Č. Brukner, M. Żukowski, *Entanglement and communication-reducing properties of noisy N -qubit states*, Phys. Rev. A 81, 042101 (2010).
3. J. Gruca, W. Laskowski, M. Żukowski, N. Kiesel, W. Wieczorek, C. Schmid and H. Weinfurter, *Nonclassicality thresholds for multiqubit states: Numerical analysis*, Phys. Rev. A 82, 012118 (2010).
4. P. Kurzyński, T. Paterek, R. Ramanathan, W. Laskowski, D. Kaszlikowski, *Correlation Complementarity Yields Bell Monogamy Relations*, Phys. Rev. Lett. 106, 180402 (2011).

5. W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, and M. Żukowski, *Correlation-tensor criteria for genuine multiqubit entanglement*, Phys. Rev. A 84, 062305 (2011).
6. J. Gruca, W. Laskowski, M. Żukowski, *Nonclassicality of pure two-qutrit entangled states*, Phys. Rev. A 85, 022118 (2012).
7. W. Laskowski, D. Richart, C. Schwemmer, T. Paterek, and H. Weinfurter, *Experimental Schmidt Decomposition and State Independent Entanglement Detection*, Phys. Rev. Lett. 108, 240501 (2012).
8. M. Markiewicz, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, *Detecting genuine multipartite entanglement of pure states with bipartite correlations*, Phys. Rev. A 87, 034301 (2013).
9. W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, *Entanglement witnesses with variable number of local measurements*, Phys. Rev. A 88, 022304 (2013).
10. W. Laskowski, D. Richart, C. Schwemmer, L. Knips, T. Paterek, H. Weinfurter, *Optimized state-independent entanglement detection based on a geometrical threshold criterion*, Phys. Rev. A 88, 022327 (2013).

C. omówienie celu naukowego/artystycznego ww. pracy/prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania

Osiągnięcie naukowe jest częścią prac zbiorowych. Mój wkład opisany jest w pkt. IB w załączniku *Wykaz opublikowanych prac naukowych lub twórczych prac zawodowych oraz informacja o osiągnięciach dydaktycznych, współpracy naukowej i popularyzacji nauki*. Wkład współautorów jest przedstawiony na załączonych oświadczeniach.

W dalszej części auroreferatu referencje oznaczone literami, np. [A], odnoszą się do prac stanowiących cykl publikacji, na którym opiera się niniejszy wniosek habilitacyjny. Referencje oznaczone liczbami, np. [1], wskazują na prace wnioskodawcy nie wchodzące w skład jednotematycznego cyklu publikacji. Pozostałe referencje oznaczone nazwiskiem pierwszego autora i rokiem publikacji, np. [Eintein1935] odnoszą się do publikacji innych osób i zostały włączone celem osadzenia autoreferatu we właściwym kontekście.

1. Wstęp

Interesujące własności splątanych układów kwantowych zostały pierwszy raz odnotowane w słynnej pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena [Einstein1935]. Zapostulowali oni, iż mechanika kwantowa nie jest teorią kompletną, ponieważ nie zawiera w swoim opisie, tak zwanych, elementów rzeczywistości, czyli takich wielkości fizycznych, których wartość możemy określić bez jakiegokolwiek zaburzenia systemu. Dało to początek długiej debacie, która jednak przez znaczną część fizyków została zignorowana, jako nie mająca większego znaczenia praktycznego. W 1964 roku sytuacja zmieniła się diametralnie. John Bell pokazał, iż teoria zawierająca w swoim opisie elementy rzeczywistości prowadzi do przewidywań niezgodnych z mechaniką kwantową [Bell1964]. Udowodnił to poprzez wyprowadzenie nierówności, która ustanawiała granicę pomiędzy opisem klasycznym i kwantowym, jednocześnie pokazując iż splątany stan kwantowy, wykazujący korelacje Einsteina - Podolskiego - Rosena łamie tę nierówność. Nadało to szczególny charakter kwantowemu splątaniu, które nie ma swojego odpowiednika w fizyce klasycznej. Kwantowe korelacje są jedną z głównych przyczyn fundamentalnych różnic pomiędzy mechaniką kwantową a klasyczną.

Intensywne badania podstaw mechaniki kwantowej są kontynuowane do dnia dzisiejszego. Od połowy lat dziewięćdziesiątych obserwujemy gwałtowne przyspieszenie badań w nowej dziedzinie nazwanej kwantową informacją. Obejmuje ona badanie podstaw mechaniki kwantowej w kierunku zastosowania w przetwarzaniu informacji o ponad-klasycznych możliwościach. Do dnia dzisiejszego pojawiło się wiele protokołów kwantowego przetwarzania informacji wykorzystujących nieklasyczne korelacje, które są efektem splątania [Nilsen2000]. Jako najważniejsze można przytoczyć: *kwantową dystrybucję klucza kryptograficznego* – super bezpieczny transfer informacji, *kwantową teleportację* – dokładny przesył informacji z jednego punktu do drugiego, bez żadnych punktów pośrednich, *gęste kodowanie* – wydajny zapis informacji, czy *wymianę splątania* – sposób na splątywanie cząstek nigdy nie oddziałujących ze sobą. Wiele z nich wykorzystuje metody interferometrii kwantowej (praca przeglądowa [Pan2012]) i została przeprowadzona w eksperymencie, a nawet wdrożona komercyjnie (kwantowa dystrybucja klucza kryptograficznego).

2. Motywacja i cel badań

Badanie splątania kwantowego i natury korelacji pozwala nam zgłębiać podstawy mechaniki kwantowej i leży w głównym nurcie zainteresowań teorii kwantowej informacji, gdzie splątanie traktowane jest jako zasób. Od samego początku tej dziedziny rozwijała się ścieżka miar splątania i sposobów jego detekcji. Praca przeglądowa [Horodecki2009] prezentuje niemal cały obszar tych badań. Podczas gdy dwucząstkowe splątanie zostało prawie całkowicie poznane, przypadki dla większej ilości systemów, wciąż stanowią otwarte wyzwanie. Pytania o strukturę splątania, o miary nieklasyczności, wciąż pozostają bez ostatecznej odpowiedzi. Co więcej, wiele z popularnych indyktorów splątania wymaga przeprowadzenia wielu pomiarów, albo nawet znajomości całej macierzy gęstości. W przypadku skomplikowanych układów stanowi to istotną barierę eksperymentalną (liczba pomiarów wymaganych do rekonstrukcji macierzy gęstości skaluje się wykładniczo z liczbą kubitów¹).

Drugim nurtem badań nieklasycznych własności stanów kwantowych jest studiowanie istnienia lokalnego i realistycznego opisu korelacji testowanego przy pomocy nierówności Bella. Oryginalne nierówności Bella zostały uogólnione na przypadek wielu obserwatorów, wielu ustawień pomiarowych, czy wyników pomiarów. Wiele tych uogólnień ma jednak charakter *ad hoc* i tylko niewiele z nich (dla najprostrzych sytuacji eksperymentalnych) jest optymalnych. Można powiedzieć, że w tym względzie możliwości eksperymentalne wyprzedzają teorię. Z praktycznego punktu widzenia nierówności Bella stanowią swoisty certyfikat bezpieczeństwa dla dystrybucji klucza kryptograficznego, testują możliwość redukcji złożoności komunikacyjnej obliczeń, czy generowania prawdziwej losowości.

Podjęte badania stanowią odpowiedź na wskazane problemy. Ich celem jest dostarczenie nowych teoretycznych narzędzi do analizy i charakteryzacji nieklasycznych własności stanów kwantowych. Z jednej strony poszukujemy alternatywnego kryterium splątania łatwego do zweryfikowania w eksperymencie. Z drugiej strony koncentrujemy się na opracowaniu optymalnej metody wykluczania klasycznego opisu kwantowych korelacji. Równoległym (pośrednim) celem jest poznanie struktury kwantowych korelacji, ich wzajemnych relacji i fundamentalnych ograniczeń.

¹ kudit (z ang. *qudit*) – układ kwantowo-mechaniczny opisywany d -wymiarową przestrzenią Hilberta, w autoreferacie będziemy przede wszystkim rozważać kubity ($d = 2$) i kutrity ($d = 3$)

3. Podsumowanie uzyskanych wyników

Moje badania koncentrują się na dwóch nieklasycznych cechach stanów kwantowych: splątaniu i braku lokalnego i realistycznego opisu dla kwantowych przewidywań. Konstruujemy narzędzia do ich wykrywania, analizy i charakteryzacji.

Prezentujemy alternatywną, geometryczną metodę detekcji splątania kwantowego. Otrzymane kryterium służy do wyprowadzenia wielu różnych warunków na splątanie wyrażonych poprzez korelacje (elementy tensora korelacji), które mogą być łatwo zmierzone w eksperymencie. Rodzina tych warunków jest istotnie bogatsza od rodziny liniowych świadków splątania, najbardziej popularnej metody jego detekcji i prowadzi do warunku koniecznego i wystarczającego na splątanie. Liniowe świadki definiują hiperpłaszczyznę w przestrzeni operatorów hermitowskich, podczas gdy nasze warunki określają figurę zamykającą w sobie stany separowalne. Pokazujemy również, jak skonstruować warunki dla konkretnego stanu. Zazwyczaj wymagają one przeprowadzenia mniejszej liczby pomiarów, niż wymagane dla pełnej tomografii stanu. Co więcej, ze względu na nieliniowy (kwadratowy) charakter warunków możemy zaprzestać wykonywania pomiarów od razu, gdy przekroczymy wymagane ograniczenie. To drastycznie zmniejsza ich liczbę.

Otrzymane warunki posłużyły nam do analizy splątania zaszumionych stanów kwantowych oraz możliwości opisanie ich korelacji klasycznymi (lokalnymi i realistycznymi) modelami. W każdym z rozważanych przypadków zidentyfikowaliśmy klasę stanów, która pomimo splątania posiada lokalny i realistyczny model korelacji.

Przedstawiamy również warunki, dzięki którym możemy dowodzić prawdziwego wielocząstkowego splątania. Pierwsza grupa warunków bierze pod uwagę wielocząstkowe korelacje, druga tylko dwucząstkowe. Pozwala to na wykrywanie wielocząstkowego splątania w stanach o różnym charakterze korelacji.

Prezentujemy także fundamentalną zasadę komplementarności kwantowych korelacji, która doprowadza nas do zasad monogamii dla łamania wielocząstkowych nierówności Bella. Pozwala nam również, w oparciu o wcześniej przedstawione kryterium, sformułować metodę wykrywania splątania bez wiedzy o stanie kwantowym i uzgodnienia lokalnych układów odniesienia. Metoda jest adaptacyjna, wybór ustawień pomiarowych w kolejnym kroku zależy od wyniku pomiaru uzyskanego w kroku poprzednim. Przyjmuje ona formę drzewa decyzji.

Przedstawiamy również metodę weryfikacji splątania dedykowaną dla stanów czystych dwóch kubitów. W pierwszej kolejności ustanawia ona eksperymentalnie rozkład Schmidta stanu, co pozwala na wykrycie splątania w dowolnym stanie czystym przy pomiarze tylko dwóch korelacji.

W drugiej części autoreferatu przedstawiamy numeryczną metodę będącą optymalnym testem lokalnego realizmu. Nie bierze on pod uwagę żadnych konkretnych nierówności Bella, ale jej działanie jest równoważne analizie kompletnego zestawu nierówności dla danej sytuacji eksperymentalnej. Metoda pozwala na zbadanie przypadków, które były do tej pory niemożliwe ze względu na brak odpowiednich nierówności. Zastosowaliśmy ją do wielu przykładów stanów wielokubitowych i stanów dwóch kubitów wyznaczając nowe, silniejsze ograniczenia na lokalny i realistyczny opis.

Zaprezentowane narzędzia (metody) zostały z powodzeniem zademonstrowane w eksperymentach przeprowadzonych przez grupę prof. Haralda Weinfurtera z Ludwig-Maximilians-Universität München i Max-Planck-Institut für Quantenoptik w Garching.

4. Kryterium splątania

Naszą odpowiedzią na problemy opisane we wstępie jest zaproponowanie nowego, alternatywnego kryterium splątania [A], będącego konsekwencją pewnego prostego faktu geometrycznego.

Zanim jednak przejdziemy do przedstawienia kryterium, warto wprowadzić użyteczną reprezentację stanu kwantowego, której będziemy używać w całym autoreferacie. Wiadomo, iż każdy stan N -qubitów możemy przedstawić w następujący sposób:

$$\rho = \frac{1}{2^N} \sum_{i_1, \dots, i_N = \{0, x, y, z\}} T_{i_1 \dots i_N} \sigma_{i_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_N}, \quad (1)$$

gdzie σ_l jest l -tą macierzą Pauliego a $T_{i_1 \dots i_N}$ są elementami tzw. tensora korelacji. W tym miejscu warto zaznaczyć, że elementy tensora korelacji $T_{i_1 \dots i_N} = \text{Tr}[\rho (\sigma_{i_1} \otimes \dots \otimes \sigma_{i_N})]$ są wielkościami bezpośrednio mierzonymi w eksperymencie. Dla przykładu, gdy mamy do czynienia z pomiarami polaryzacji fotonu, σ_z odpowiada pomiarowi polaryzacji w bazie polaryzacji pionowej – poziomej, σ_x – polaryzacji $\pm 45^\circ$ i σ_y – w bazie polaryzacji kołowej lewo/prawo skrętnej. Przyjęcie takiej reprezentacji powoduje, iż możemy w tym formalizmie przepisać definicję separowalności. Standardowa definicja stanowi, że stan ρ jest separowalny jeśli może być przedstawiony w postaci wypukłej kombinacji stanów produktowych. Taki stan separowalny musi być określony przez separowalny tensor korelacji $\hat{T}^{sep} = \sum_i p_i \hat{T}_i^{prod}$, gdzie $\hat{T}_i^{prod} = \hat{T}_i^{(1)} \otimes \dots \otimes \hat{T}_i^{(N)}$ występuje z prawdopodobieństwem p_i , a każdy $\hat{T}_i^{(l)}$ opisuje stan jednokubitowy.

Przejdźmy teraz do kryterium splątania. Tak jak wspomniano w pierwszym zdaniu, opiera się ono na prostym fakcie geometrycznym. Jeśli iloczyn skalarny dwóch rzeczywistych wektorów spełnia nierówność $(\vec{q}, \vec{h}) < (\vec{q}, \vec{q})$ to wektory \vec{h} i \vec{q} nie mogą być sobie równe. W podobny sposób możemy sformułować kryterium splątania.

$$\text{Jeśli } \max_{\hat{T}^{prod}} (\hat{T}, \hat{T}^{prod}) < (\hat{T}, \hat{T}) \text{ to stan } \rho \text{ opisany } \hat{T} \text{ jest splątany.} \quad (2)$$

Maksymalizacja, bez utraty ogólności, występuje tylko po wszystkich stanach produktowych (a nie separowalnych). Dowód kryterium opierający się o definicję separowalności został zamieszczony w pracy [A]. Przyjmując, że iloczyn skalarny w kryterium (2) określony jest w sposób następujący:

$$(\hat{X}, \hat{Y}) = \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^3 X_{i_1 \dots i_N} Y_{i_1 \dots i_N}, \quad (3)$$

nierówność bardzo upraszcza się i przyjmuje postać

$$T_{max} < \sum_{i_1, \dots, i_N=1}^3 T_{i_1 \dots i_N}^2, \quad (4)$$

gdzie T_{max} jest maksymalnym elementem tensora korelacji przy dowolnym wyborze lokalnych układów współrzędnych (największą możliwą korelacją do zmierzenia). Ponieważ $|T_{max}| \leq 1$ to jeśli $\sum_{i_1, \dots, i_N=1}^3 T_{i_1 \dots i_N}^2 > 1$ natychmiast możemy stwierdzić, że stan jest splątany. Oznacza to, że pomiary następują do momentu w którym suma kwadratów zmierzonych korelacji przekroczy jedynkę. W najlepszym wypadku są to dwa pomiary (np. dla N -kubitowych stanów GHZ²). Wynik ten nie zależy od liczby cząstek. Jest to bardzo ważna własność tego kryterium, ponieważ liczba pomiarów, które należy wykonać,

² $|GHZ_N\rangle = (|0\dots 0\rangle + |1\dots 1\rangle)/\sqrt{2}$ [Greenberger1989]

aby wykazać splątanie może być mniejsza, niż liczba wszystkich elementów sumy, a co za tym idzie mniejsza, niż ilość pomiarów wymaganych do pełnej tomografii. Szczegółowe szacunki skalowania złożoności kryterium w szczególnych przypadkach zostaną przedstawione dalej.

Kryterium (2) może zostać natychmiast uogólnione, jeśli wprowadzimy iloczyn skalarny określony przez metrykę G :

$$(\hat{X}, \hat{Y}) = \sum_{i_1, \dots, i_N; j_1, \dots, j_N=0}^3 X_{i_1 \dots i_N} G_{i_1 \dots i_N; j_1 \dots j_N} Y_{j_1 \dots j_N}. \quad (5)$$

W takim przypadku kryterium przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \text{Jeśli możemy znaleźć taką metrykę } G, \text{ dla której } \max_{\hat{T}^{prod}} (\hat{T}, \hat{T}^{prod})_G < (\hat{T}, \hat{T})_G \\ \text{to stan } \rho \text{ opisywany przez tensor korelacji } \hat{T} \text{ jest splątany.} \end{aligned} \quad (6)$$

Postać metryki możemy wydedukować z postaci tensora korelacji lub w szczególnych przypadkach wyprowadzić, co zostanie przedstawione w następnym podrozdziale.

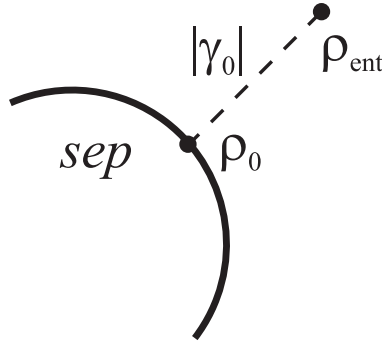
Warto również wspomnieć, iż jednakowo dobrze możemy sformułować odpowiednik powyższego kryterium dla macierzy gęstości:

$$\begin{aligned} \text{Jeśli istnieje dodatnio określony superoperator } \mathcal{G} \text{ taki, że } \max_{\rho_{prod}} \text{Tr}(\rho \mathcal{G} \rho_{prod}) < \text{Tr}(\rho \mathcal{G} \rho), \\ \text{gdzie maksymalizacja odbywa się po wszystkich produktowych stanach czystych, to stan } \rho \text{ jest splątany.} \end{aligned} \quad (7)$$

Powyższe kryteria są bardzo ogólne. Działają niezależnie od liczby podukładów, czystości stanu, czy wymiaru przestrzeni Hilberta (w przypadku zastosowania kryteriów (2) i (6) do przypadków wielowymiarowych należy wprowadzić uogólnienie tensora korelacji, co zostało pokazane w pracach [A] i [B]). Co więcej, mogą być stosunkowo łatwo użyte do wykluczenia nie tylko pełnej separowalności, ale jej określonego typu, np. biseparowalności. Zostanie to omówione w podrozdziale IV.C.7.

5. Siła kryterium. Warunek konieczny i wystarczający

Pierwsze pytanie, które się nasuwa, dotyczy tego, czy dla każdego stanu splątanego możemy znaleźć taką metrykę G (czy superoperator \mathcal{G}), że kryterium (6, 7) jest spełnione. Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna i przy okazji daje nam przepis na konstruowanie metryki G (superoperatora \mathcal{G}). Wiadomo, że



Rysunek 1: Dystans $|\gamma_0|$ pomiędzy danym stanem splątany ρ_{ent} a najbliższym jemu stanem separowalnym ρ_0 .

stany separowalne tworzą zbiór wypukły w przestrzeni operatorów hermitowskich z iloczynem skalarnym $(\rho|\rho') = \text{Tr}(\rho\rho')$. W pracy [A] pokazano, że dla każdego stanu splątanego ρ_{ent} spełniona jest nierówność:

$$(\rho_{ent}|\gamma_0)(\gamma_0|\rho_{sep}) < (\rho_{ent}|\gamma_0)(\gamma_0|\rho_{ent}), \quad (8)$$

gdzie ρ_{sep} jest dowolnym stanem separowalnym, a $\gamma_0 = \rho_{ent} - \rho_0$ jest operatorem, którego moduł to dystans pomiędzy danym stanem splątaniem ρ_{ent} a najbliższym do niego stanem separowalnym ρ_0 . W konsekwencji możemy stwierdzić, że dla każdego stanu splątanego możemy znaleźć taki dodatnio określony superoperator \mathcal{G} , którego działanie można symbolicznie przedstawić jako $\mathcal{G} = |\gamma_0\rangle\langle\gamma_0|$, że dla dowolnego stanu separowalnego (w tym również produktowego) spełniona jest nierówność (7). Oznacza to, że zaprezentowane kryterium jest nie tylko warunkiem dostatecznym na splątanie, ale również koniecznym. Znalezienie superoperatora \mathcal{G} sprowadza się zatem do znalezienia najbliższego stanu separowalnego.

W pracy [A] pokazujemy również relację pomiędzy kryterium a świadkami splątania [Horodecki1996]. Otóż operator hermitowski γ_0 wiąże się ze świadkiem \mathcal{W} , który wykrywa splątanie w stanie ρ_{ent} tak, że $\mathcal{W} = \alpha\mathbb{1} - \gamma_0$, gdzie $\alpha = \max_{\rho_{sep}}(\gamma_0|\rho_{sep})$. Konieczne trzeba zaznaczyć, że nie każdy nasz warunek splątania wyrażony poprzez operator \mathcal{G} może być przedstawiony jako świadek splątania. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy \mathcal{G} jest projektorem jednowymiarowym. Oznacza to, że nasze kryterium reprezentuje dużo bogatszą rodzinę indykatorów splątania, niż rodzina świadków splątania. Przekonywującym przykładem jest porównanie liniowego świadka splątania dla jednego z czterech dwukubitowych stanów Bella. Gdy liniowy świadek wykryje splątanie w jednym z tych stanów, nie wykryje go u pozostałych, podczas gdy np. warunek (4) wykrywa splątanie we wszystkich stanach Bella.

6. Świadek ze zmienną liczbą pomiarów

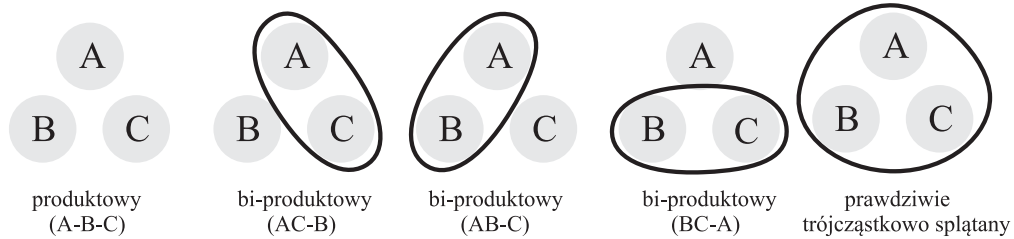
Znajomość stanu, w którym chcemy wykryć splątanie pozwala nam wyprowadzić świadka splątania \mathcal{W} , przy pomocy którego będziemy mogli to zrobić. W praktyce będzie oznaczało to znalezienie superoperatora \mathcal{G} . Jednak zastosowanie świadka, czy kryterium opartego na superoperatorze \mathcal{G} (7) nie jest wygodne dla eksperymentu, ponieważ wymaga znajomości macierzy gęstości. W pracy [B] pokazujemy, jak z superoperatora \mathcal{G} można wyprowadzić metrykę G używaną w kryterium (6). Znajomość metryki bezpośrednio przekłada się wiedzę o pomiarach, które należy wykonać, by wykryć splątanie. W eksperymencie wykonujemy tylko te pomiary, które odpowiadają niezerowym elementom $G_{i_1\dots i_N; j_1\dots j_N}$, co w wielu przypadkach istotnie zmniejsza ich ilość. Pozostałe elementy tensora korelacji nie wchodzą do kryterium więc ich pomiar jest zbędny.

Takie konstruowanie świadków splątania, jako funkcji kwadratów elementów tensora korelacji (wszystkie elementy sumy są przez to dodatnie) pozwala na zaprzestanie pomiarów, zaraz gdy wartość wyrażenia przekroczy określone ograniczenie. Takiej własności nie mają liniowe świadki splątania, w których do ostatecznego rozstrzygnięcia istnieje potrzeba przeprowadzenia wszystkich pomiarów określających świadka, ponieważ każdy z nich może wnieść dodatnią, ale też ujemną wartość i obniżyć wartość świadka poniżej granicy splątania. W pracy [B] ilustrujemy metodę generowania kwadratowych świadków dla stanu izotropowego (N kubitów) [Horodecki1999], trójcząstkowego stanu W^3 oraz stanu dwóch kubitów ze splątaniem związanym [Horodecki1997]. We wszystkich tych przypadkach kryterium kwadratowe jest równie silne, jak liniowe, przy czym pozwala na mniejszą liczbę pomiarów.

³ N -cząstkowy stan W : $(|W_N\rangle = (|10\dots 0\rangle + |010\dots 0\rangle + \dots + |0\dots 01\rangle))/\sqrt{N}$ [Dür2000]

7. Wykluczanie innych typów separowalności. Prawdziwe wielocząstkowe splątanie

Do tej pory wszystkie wersje kryteriów zostały sformułowane dla problemu wykluczenia całkowitej separowalności. Sytuacja komplikuje się, gdy rozważymy więcej niż dwa podukłady. W takim przypadku splątanie może być rozłożone na kilka sposobów (patrz rysunek 2). Na przykład dla stanu



Rysunek 2: Różny rozkład splątania w stanach czystych o trzech podukładach.

czystego składającego się z $N = 3$ podukładów możemy mieć do czynienia ze stanem całkowicie produktowym $|\psi_A\rangle|\psi_B\rangle|\psi_C\rangle$, stanami biproduktowymi ($|\psi_{AB}\rangle|\psi_C\rangle$, $|\psi_{AC}\rangle|\psi_B\rangle$, $|\psi_{BC}\rangle|\psi_A\rangle$) i stanem prawdziwie trójcząstkowo splątany $|\psi_{ABC}\rangle$. W dalszej części, jako stan k -produktowy będziemy oznaczać stan, który możemy przedstawiać, jako produkt k stanów czystych. W wielu przypadkach, poza stopniem separowalności ważne będzie podanie podziału, który oznaczymy przez π . W powyższym przykładzie, dla przypadku $k = 2$ (biprodukty), mamy do czynienia z różnymi podziałami, w kolejności: $AB - C$, $AC - B$, i $BC - A$.

Jak wspominałem już wcześniej, omawiane kryterium może zostać wykorzystane do wykluczania separowalności określonego typu. Zostało to zaprezentowane w pracach [C] i [D]. Punktem wyjścia jest sformułowanie kryterium postaci (6), w którym \hat{T}^{prod} zastępujemy \hat{T}_π^{k-prod} , co oznacza tensor korelacji stanu k -produktowego względem podziału π . Wtedy kryterium przyjmuje postać:

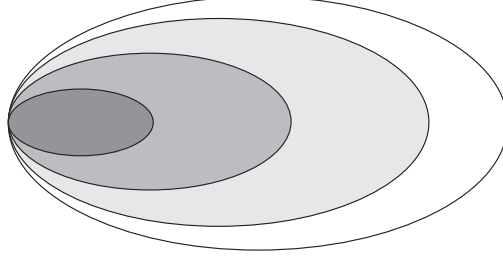
$$\begin{aligned}
 & \text{Jeśli możemy znaleźć taką metrykę } G, \text{ że dla dowolnego podziału } \pi \\
 & \max_{\hat{T}_\pi^{k-prod}} (\hat{T}, \hat{T}_\pi^{k-prod})_G < (\hat{T}, \hat{T})_G \quad (9) \\
 & \text{to stan } \rho \text{ opisywany przez tensor korelacji } \hat{T} \text{ nie jest } k\text{-separowalny.}
 \end{aligned}$$

Maksymalizacja, tak jak poprzednio bez utraty ogólności, może odbywać się tylko po stanach k -produktowych, a nie k -separowalnych.

Bazując na tym ogólnym kryterium, w pracy [C] wyprowadziliśmy kilka konkretnych wystarczających warunków na wielocząstkowe splątanie w formie nieliniowych warunków na elementy tensora korelacji. Jeden z warunków, dla trzech kubitów, przyjmuje formę:

$$\max_{\pi} \max_{\hat{T}_\pi^{2-prod}} (\hat{T}_\pi^{2-prod}, \hat{T}) < (\hat{T}, \hat{T}). \quad (10)$$

Spełnienie tego warunku wyklucza biseparowalność i w konsekwencji wykazuje prawdziwe trójcząstkowe splątanie. Ten warunek powstał z kryterium (9) poprzez wzięcie metryki diagonalnej $G_{i_1 i_2 i_3; j_1 j_2 j_3} = G_{i_1 i_2 i_3} \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_3 j_3}$, przy czym niezerowe są tylko takie elementy, w których wszystkie indeksy są różne od 0. Oznacza to, że bierzemy pod uwagę tylko pełne trójcząstkowe korelacje. Ciekawą własnością tego kryterium jest fakt, iż wykrywa ono trójcząstkowe splątanie zarówno w stanie GHZ, jak i W, pomimo tego, iż należą one do dwóch różnych rodzin stanów i przejawiają odmienną naturę.



Rysunek 3: Zbiory stanów k -separowalnych – wszystkie są wypukłe. Im ciemniejszy kolor zbioru, tym bardziej separowalne stany zawiera. Zbiór stanów k -separowalnych zawiera w sobie zbiory (jako podzbiory) stanów więcej niż k separowalnych.

Inny warunek, tym razem sformułowany dla N -kubitów, powstał również z kryterium (9) przy zastosowaniu metryki diagonalnej, przy czym niezerowe wartości $G_{i_1 \dots i_N}$ odpowiadają znakowi niezerowych elementów tensora korelacji N -kubitowego stanu GHZ. Stosując to kryterium do uogólnonego stanu GHZ z domieszką białego szumu:

$$\rho = v|GHZ_N^\alpha\rangle\langle GHZ_N^\alpha| + \frac{(1-v)}{2^N}\mathbb{1}, \quad (11)$$

gdzie $|GHZ_N^\alpha\rangle = \cos\alpha|0\dots 0\rangle + \sin\alpha|1\dots 1\rangle$, pokazaliśmy, że stan jest N -cząstkowo splątany dla $v > (2^N \cos^2 \alpha - 1)/(2^N - 1)$. Do tej pory ten wynik był znany dla $\alpha = \pi/4$ [Gühne2010]. Proszę zauważyć, że dla $\alpha = 0$ stan jest w pełni separowalny, ale już dla infinitesimalnie małego α wymaga splątania pomiędzy wszystkimi N cząstkami. Podobny argument może być zastosowany do stanu GHZ pomiędzy $N-1$ cząstkami i nieskorelowanym stanem N tej cząstki. W związku z tym, możemy stwierdzić, że w infinitezymalnym sąsiedztwie stanu produktowego $|0\dots 0\rangle$ leżą stany ze splątaniem pomiędzy dowolną liczbą podsystemów (jak zilustrowano na rysunku 3).

Wszystkie warunki na N -cząstkowe splątanie podane w pracy [C] zawierają w sobie N -cząstkowe korelacje. Odmienna sytuacja została zaprezentowana w pracy [D], gdzie do ostatecznego warunku wykluczającego k -separowalność wchodzi tylko dwucząstkowe korelacje. Rozważmy sumę wszystkich dwucząstkowych korelacji w płaszczyźnie (powiedzmy $x-y$) ortogonalnej do kierunków wyznaczonych przez lokalne wektory Blocha obserwatorów (powiedzmy z):

$$\mathcal{M}(|\psi\rangle) = \sum_{i=\{x,y\}} \sum_{j=\{x,y\}} (T_{ij0\dots 0}^2 + T_{i0j0\dots 0}^2 + \dots + T_{0\dots 0ij}^2). \quad (12)$$

Jeśli dla dowolnego stanu czystego N -kubitów $|\psi\rangle$:

$$\begin{aligned} (N=3) \quad \mathcal{M}(|\psi\rangle) > 2 &\implies |\psi\rangle \text{ jest prawdziwie 3-cząstkowo splątany.} \\ (N=4) \quad \mathcal{M}(|\psi\rangle) > 4 &\implies |\psi\rangle \text{ jest prawdziwie 4-cząstkowo splątany.} \\ (N \geq 5) \quad \mathcal{M}(|\psi\rangle) > \binom{N-1}{2} &\implies |\psi\rangle \text{ jest prawdziwie } N\text{-cząstkowo splątany.} \end{aligned} \quad (13)$$

Używając tego warunku możemy udowodnić prawdziwe wielocząstkowe splątanie dla stanów Dickego⁴: $|D_3^1\rangle$ i $|D_5^2\rangle$. Używając innego szczegółowego warunku z pracy [D] możemy również pokazać, że stan $|D_N^{(n-1)/2}\rangle$ (dla

⁴ $|D_N^e\rangle = \binom{N}{e}^{-1/2} \sum_{\pi} |\pi(\underbrace{1\dots 1}_e \underbrace{0\dots 0}_{N-e})\rangle$, gdzie sumowanie jest po wszystkich permutacjach [Dicke1954]

N nieparzystego) jest przynajmniej $(n + 3)/2$ prawdziwie splątany. Eksperymentalna korzyść z zastosowania tych warunków poprzez obliczenie sumy (12) może być rozpatrywana dwojako. Jeśli w eksperymencie dokonujemy pomiarów dwucząstkowych korelacji, to możemy zaprzestać pomiarów, gdy tylko przekroczyliśmy zadane ograniczenie. Wynika to z tego samego powodu co poprzednio. Często jednak dwucząstkowe korelacje są wyznaczane (jako marginały) z pomiarów prowadzących do uzyskania korelacji N -cząstkowych. W takim przypadku korzyść eksperymentalna jest nawet większa, gdyż wystarczy zmierzyć tylko dwa ustawienia prowadzące do korelacji $T_{x\dots x}$ i $T_{y\dots y}$ i z otrzymanych danych obliczyć wszystkie $2\binom{n}{2}$ dwucząstkowe korelacje.

Możliwość wykrywania prawdziwego wielocząstkowego splątania za pomocą korelacji niższych rzędów jest ważną umiejętnością. Istnieją prawdziwie N -cząstkowo splątane stany kwantowe, które nie posiadają N -cząstkowych korelacji lub takie korelacje są słabe (przykład takiego stanu występuje w pracy [4]). Kryteria oparte na N -cząstkowych korelacjach nie są w takich przypadkach pomocne. Warunki podane w pracy [D] wychodzą na przeciw temu problemowi.

8. Stany splątane w obecności szumu

W pracy [E], w oparciu o uzyskane kryterium splątania (6), rozważamy własności stanów wielu kubitów: GHZ i W, po przejściu przez różne zaszumione kanały kwantowe:

- biały szum – dodanie maksymalnie zmieszanego stanu,
- kolorowy szum – domieszanie stanu produktowego $|0\dots 0\rangle\langle 0\dots 0|$,
- lokalna depolaryzacja – biały szum domieszany lokalnie do każdego z podukładów,
- defazowanie – utrata koherencji,
- tłumienie amplitudy – system z określonym prawdopodobieństwem traci wzbudzenie.

Siłę zaszumienia opisujemy parametrem ζ , gdzie $\zeta = 0$ – odpowiada najsilniejszemu szumowi niszczącemu natychmiast splątanie, a $\zeta = 1$ – brakowi szumu. W przypadku białego szumu, parametr ζ często nazywany jest widzialnością.

Analizie poddajemy dwojaki nieklasyczne własności stanów: splątanie i możliwość lokalnego i realistycznego opisu (łamanie nierówności Bella), szukając krytycznych parametrów opisujących szumy, powyżej których stan jest splątany (ζ_{ent}), czy łamie nierówność Bella (ζ_{lr}). Jako indykatora splątania używamy kryterium (6) z pracy [A], a jako nierówności Bella wykorzystujemy nierówność wieloustawieniową z pracy [2].

Głównym wynikiem pracy [E] jest znalezienie rodzin stanów splątanych, które nie łamią (spełniają) wieloustawieniowych nierówności Bella. Szczegółowe rezultaty, w granicy $N \rightarrow \infty$ znajdują się w tabeli:

	biały szum	kolorowy szum	lokalna depol.	defazowanie	tłumienie amp.
GHZ	$\zeta_{ent} \rightarrow 1/2$	$\zeta_{ent} \rightarrow 0$	$\zeta_{ent} \rightarrow 1/2$	$\zeta_{ent} \rightarrow 0$	$\zeta_{ent} \rightarrow 1/4$
	$\zeta_{lr} \rightarrow 1/\sqrt{2}$	$\zeta_{lr} \rightarrow 1/\sqrt{2}$	$\zeta_{lr} \rightarrow 1/\sqrt{2}$	$\zeta_{lr} \rightarrow 1/2$	$\zeta_{lr} \rightarrow 1/2$
W	$\zeta_{ent} \rightarrow 1$	$\zeta_{ent} \rightarrow 0$	$\zeta_{ent} \rightarrow 1$	$\zeta_{ent} \rightarrow 0$	$\zeta_{ent} \rightarrow 1/3$
	$\zeta_{lr} \rightarrow 1$	$\zeta_{lr} \rightarrow 1$	$\zeta_{lr} \rightarrow 1$	$\zeta_{lr} \rightarrow 0$	$\zeta_{lr} \rightarrow 2/3$

Wyniki dla różnych stanów początkowych zaprezentowane są w wierszach, a zaaplikowane do nich zaszumione kanały – w kolumnach. W tabeli przedstawiono krytyczne wartości parametrów ζ w granicy dużej liczby kubitów $N \rightarrow \infty$. Dodatkowo, aby jednakowo porównać krytyczne parametry dla różnych typów szumu, są one przeliczone na czastkę w tym sensie, że z wartości dla białego i kolorowego szumu (szumy globalne) wyciągnięto pierwiastek N -tego stopnia.

Należy zauważyć, że we wszystkich przypadkach ζ_{ent} jest co najwyżej kwadratem ζ_{lr} . Ta cecha obowiązuje również dla ustalonego N (a nie tylko w granicy), co zostało pokazane w pracy [E]. Oznacza to, że znaleźliśmy w każdym z rozważanych przypadków stany splątane, które spełniają wieloustawieniowe nierówności Bella. Nawet w granicy $N \rightarrow \infty$ istnieje skończona luka pomiędzy krytycznym parametrem dla splątania a krytycznym parametrem dla łamania nierówności Bella.

Jeśli rozważymy standardowe nierówności Bella (dwa ustawienia u każdego z obserwatorów) [WWWZB2001] to największa luka pomiędzy ζ_{ent} a ζ_{lr} była do tej pory znana dla stanu Wernera [Werner1989], czyli mieszanki jednego ze stanów Bella, powiedzmy $|\phi^+\rangle = |GHZ_2\rangle$, z białym szumem. W takim przypadku $\zeta_{ent} = 1/3$ a $\zeta_{lr} = 1/\sqrt{2}$. Jeśli rozważymy mieszankę tego samego stanu z kolorowym szumem $|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|$ okaże się, że stan jest splątany, gdy tylko $\zeta > 0$, podczas gdy granica łamania nierówności Bella $\zeta_{lr} = 1/\sqrt{2}$ pozostaje bez zmian. Luka zatem jest większa. Co więcej, jest największa, ponieważ udowodniono, że $\zeta_{lr} = 1/\sqrt{2}$ odpowiada największemu łamaniu lokalnego realizmu [Tsirelson1980]. Należy odnotować, że te stany znane są jako maksymalnie splątane stany mieszane (MEMS) [Munro2001].

Na koniec warto podać, iż z praktycznego punktu widzenia stany, które są splątane, a nie łamią nierówności Bella, pomimo splątania, nie mogą zostać użyte do redukcji złożoności komunikacyjnej obliczeń [Brukner2004], czy bezpiecznej dystrybucji klucza kryptograficznego [Barrett2005].

9. Komplementarność korelacji

Korelacje (elementy tensora korelacji) w pełni określają stan kwantowy. Charakteryzują jego nieklasyczne własności takie jak splątanie [A, B, C, D, Vicente2011] i łamanie nierówności Bella [Żukowski2002, 2]. Studiowanie ich struktury i wzajemnych zależności dostarcza zarówno wiedzy o podstawach mechaniki kwantowej, jak i możliwości wykorzystania przy konstrukcji teoretycznych narzędzi do badania stanów kwantowych. W pracy [I] przedstawiamy zasadę komplementarności dla kwantowych korelacji. Prowadzi ona do relacji monogamii dla łamania nierówności Bella oraz może służyć do skonstruowania adaptacyjnej metody detekcji splątania.

Rozważmy zbiór operatorów wzajemnie antykomutujących $S = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$. Jeśli α_i oznacza wartość oczekiwaną operatora A_i to

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i^2 \leq 1 \quad (14)$$

w dowolnym stanie fizycznym. Oznacza to, że operatory wzajemnie antykomutujące są komplementarne i nie mamy o nich jednoczesnej wiedzy.

Monogamia łamania nierówności Bella została pierwszy raz pokazana w pracy [Toner2006]. Udowodniono, że jeśli rozważymy trzech obserwatorów (A, B i C) i zdefiniujemy nierówności CHSH [Clauser1969] dla par AB i AC, to nierówność $CHSH_{AB}$ nie będzie nigdy złamana, gdy złamana będzie nierówność $CHSH_{AC}$ i odwrotnie. Co więcej, suma kwadratów współczynników łamania obu nierówności jest ograniczona przez 2 (jeśli klasyczne ograniczenia nierówności CHSH sprowadzimy do 1).

Zostało pokazane w pracy [Żukowski2002], że łamanie nierówności Bella dla funkcji korelacji z dwoma ustawieniami u każdego z obserwatorów jest ograniczone z góry

$$\mathcal{L}^2 \leq \sum_{i_1, \dots, i_N = \{x, y\}} T_{i_1 \dots i_N}^2, \quad (15)$$

gdzie sumowanie odbywa się po ortogonalnych lokalnych kierunkach x i y , które rozpinają płaszczyznę lokalnych ustawień. Jeśli prawa strona nierówności jest mniejsza od 1 to istnieje lokalny i realistyczny model.

W pierwszej kolejności wykorzystujemy zasadę komplementarności do wyprowadzenia maksymalnego kwantowego ograniczenia na łamanie nierówności dla dwóch kubitów, które zostało podane w [Tsirelson1980]. Dla dwóch kubitów mamy $\mathcal{L}^2 \leq T_{xx}^2 + T_{xy}^2 + T_{yx}^2 + T_{yy}^2$. Możemy tutaj zidentyfikować dwa zbiory wzajemnie antykomutujących obserwabli $\{\sigma_x \otimes \sigma_x, \sigma_x \otimes \sigma_y\}$ oraz $\{\sigma_y \otimes \sigma_x, \sigma_y \otimes \sigma_y\}$, co oznacza, że $T_{xx}^2 + T_{xy}^2 \leq 1$ i $T_{yx}^2 + T_{yy}^2 \leq 1$, więc $\mathcal{L} \leq \sqrt{2}$, co stanowi dokładnie ograniczenie Tsirelsona.

Możemy również w tym formalizmie odtworzyć monogamię Tonera-Verstraete: $\mathcal{L}_{AB}^2 + \mathcal{L}_{AC}^2 \leq \sum_{k,l=\{x,y\}} T_{kl0}^2 + \sum_{k,m=\{x,y\}} T_{k0m}^2 \leq 2$, ponieważ wszystkie operatory, których kwadraty wartości oczekiwanych wchodzi do sum można pogrupować w dwa zbiory operatorów wzajemnie antykomutujących.

Uogólniając to na przypadek, w którym mamy do czynienia z kubitami A i dwoma grupami $M = (N-1)/2$ kubitów: $\vec{B} = \{B_1, \dots, B_M\}$ i $\vec{C} = \{C_1, \dots, C_M\}$ możemy sformułować nierówności Bella dla układów $A\vec{B}$ i $A\vec{C}$. W takim przypadku operatory możemy pogrupować na 2^M zbiorów operatorów wzajemnie antykomutujących i relacja przyjmuje postać: $\mathcal{L}_{A\vec{B}}^2 + \mathcal{L}_{A\vec{C}}^2 \leq 2^M$. Proszę zauważyć, iż w tym przypadku obie nierówności mogą być łamane, lecz nie mogą być łamane dowolnie mocno. W tym wypadku jest to bardziej relacja “coś za coś”, niż relacja monogamii.

Podobny efekt zaobserwujemy, gdy wykorzystamy zasadę komplementarności korelacji do czterech układów A, B, C i D, gdzie zdefiniujemy nierówności Bella dla wszystkich kombinacji trójek: ABC, ABD, ACD, BCD. Otrzymujemy wtedy $\mathcal{L}_{ABC}^2 + \mathcal{L}_{ABD}^2 + \mathcal{L}_{ACD}^2 + \mathcal{L}_{BCD}^2 \leq 4$. W tym przypadku maksymalnie trzy nierówności mogą zostać złamane.

Wszystkie z przetowanych relacji są nasycalne w tym sensie, że istnieją stany kwantowe, które osiągają ograniczenie. Są one kwadratowe w funkcji łamania nierówności Bella i silniejsze od relacji, które wynikają z zakazu komunikowania się szybciej niż światło (są liniowe w funkcji łamania).

Zasada komplementarności może zostać również użyta do adaptacyjnego wykrywania splątania. Popatrzmy na jedną z relacji dla dwóch kubitów:

$$T_{zz}^2 + T_{zx}^2 + T_{zy}^2 + T_{x0}^2 + T_{y0}^2 \leq 1. \quad (16)$$

Jeśli będziemy chcieli wykryć splątanie w stanie dwóch kubitów i użyć prostego kryterium (4), w skład którego wchodzi kwadraty wszystkich korelacji dwukubitowych, to jeśli zmierzmy T_{zz} i okaże się on równy jeden (idealna sytuacja teoretyczna) to bezprzedmiotowe pozostaje mierzenie T_{zx} i T_{zy} , gdyż zgodnie z zasadą komplementarności muszą być one równe 0. Szczegółowy opis metody adaptacyjnej został przedstawiony w pracy [J, K] i zostanie zaprezentowany w drugiej części następnego podrozdziału.

10. Detekcja splątania niezależna od stanu

W pracy [B], opisaney w rozdziale IV.C.6, została pokazana metoda generowania nieliniowego kryterium splątania w funkcji elementów tensora korelacji mierzonych w eksperymencie. Metoda ta zakłada jednak wiedzę o stanie, którego splątanie chcemy wykazać. W pracach [J] i [K] (praca [K] jest rozszerzoną wersją pracy [J]) przedstawiono procedury wykrywania splątania (często w kilku krokach), która nie wymaga ani

wiedzy o stanie, ani nawet uzgodnienia układów odniesienia obserwatorów. Pierwsza z nich oparta jest o rozkład Schmidta, druga przyjmuje formę drzewa decyzji.

Do weryfikacji splątania będziemy używać modyfikacji prostego warunku (4), polegającej na zastąpieniu T_{max} przez 1 ($T_{max} \leq 1$). Zatem jeśli

$$\sum_{i_1, \dots, i_N = \{x, y, z\}} T_{i_1 \dots i_N}^2 > 1 \quad (17)$$

to stan opisany tensorem korelacji \hat{T} jest splątany. Wadą takiego uproszczenia jest utrata mocy kryterium, chociaż dla stanów czystych wciąż pozostaje to warunkiem koniecznym i wystarczającym. Zaletą tej modyfikacji jest uzyskanie kryterium niezależnego od stanu. Ograniczenie, które trzeba złamać, w przeciwieństwie do T_{max} nie zależy od stanu. Jest to poważny zysk z punktu widzenia eksperymentu. Aby wyznaczyć T_{max} należałoby zmierzyć wszystkie korelacje. Najważniejszym pytaniem, które należy teraz postawić jest to, jak ustalić kolejność pomiarów, by jak najszybciej przekroczyć ograniczenie.

Eksperymentalny rozkład Schmidta.

Pierwsza procedura wykrywania splątania dedykowana jest stanom czystym dwóch kubitów. Wiadomo, iż każdy taki stan możemy przedstawić w rozkładzie Schmidta, jako $|\psi_S\rangle = \cos\theta|a\rangle|b\rangle + \sin\theta|a_\perp\rangle|b_\perp\rangle$, gdzie lokalne bazy $\{a, a_\perp\}$, $\{b, b_\perp\}$ zwane są bazami Schmidta. Jeśli stan jest w rozkładzie Schmidta to tylko diagonalne elementy tensor korelacji są niezerowe: $T_{zz} = 1, T_{yy} = -\sin 2\theta, T_{xx} = \sin 2\theta$. Oznacza to, że w każdym stanie czystym możemy wykryć splątanie tylko w dwóch krokach, ponieważ $T_{z'z'}^2 + T_{y'y'}^2 = 1 + \sin^2 2\theta > 1$ (dla $\theta \neq 0$). Przymy przy indeksach oznaczają przejście do baz Schmidta. Okazuje się, że bazy Schmidta można wyznaczyć mierząc lokalnie wektory Blocha $\vec{\alpha}$ ($\vec{\beta}$) Alicji (Boba) ⁵, które są związane z elementami tensora korelacji $\vec{\alpha}_i = T_{i0}/\sqrt{T_{x0}^2 + T_{y0}^2 + T_{z0}^2}$. Ich kierunki określają bazy Schmidta z dokładnością do globalnej fazy Φ . Gdy zapiszemy te bazy w bazie obliczeniowej mamy:

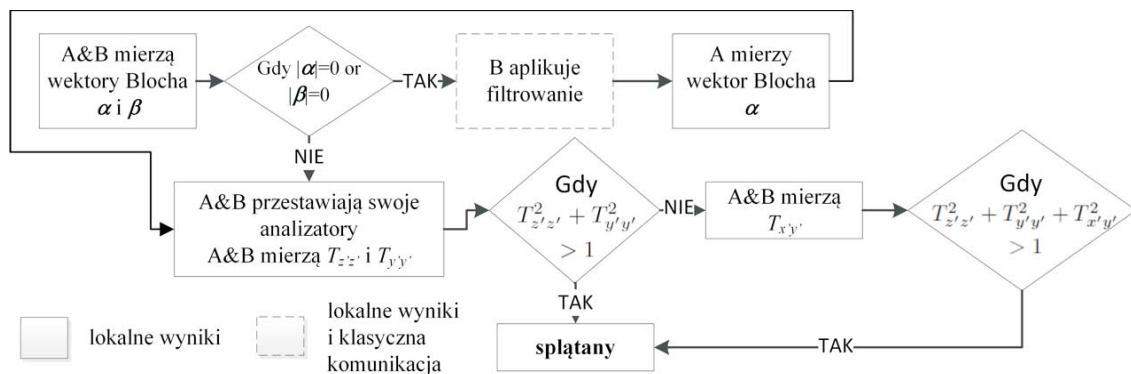
$$\begin{aligned} |a\rangle &= \cos \xi_A |0\rangle + e^{i\varphi_A} \sin \xi_A |1\rangle, \\ |a_\perp\rangle &= \sin \xi_A |0\rangle - e^{i\varphi_A} \cos \xi_A |1\rangle, \\ |b\rangle &= \cos \xi_B |0\rangle + e^{i\varphi_B} \sin \xi_B |1\rangle, \\ |b_\perp\rangle &= e^{i\Phi} (\sin \xi_B |0\rangle - e^{i\varphi_B} \cos \xi_B |1\rangle). \end{aligned} \quad (18)$$

Wymagane współczynniki mogą być wyznaczone lokalnie bezpośrednio z wektorów Blocha, u Alicji $\vec{\alpha} = (\sin 2\xi_A \cos \varphi_A, \sin 2\xi_A \sin \varphi_A, \cos \xi_A)$ i podobnie u Boba. Przejście do baz Schmidta odbywa się całkowicie lokalnie (bez komunikacji) poprzez przestrojenie urządzeń pomiarowych. W teorii oznacza to zaaplikowanie lokalnych transformacji unitarnych $U(\xi_A, \varphi_A) \otimes U(\xi_B, \varphi_B)$. W efekcie otrzymujemy uzgodnienie lokalnych układów odniesienia.

Globalna faza w $|b_\perp\rangle$ przejawia się, jako względna faza w rozkładzie Schmidta. Do jej wyznaczenia potrzebny jest pomiar korelacyjny, np. $\cos \Phi = T_{yy}/\sqrt{1 - T_{x0}^2 - T_{y0}^2 - T_{z0}^2}$. Jeśli Bob nie wyznaczy tej fazy (bis przy indeksie korelacji), korelacja $T_{y'y''} = \sin 2\theta \cos \Phi$ może zniknąć w szczególnym przypadku $\Phi = \pi/2$ i dwa pomiary $T_{z'z''}$ i $T_{y'y''}$ nie wystarczą do wykrycia splątania. W takim przypadku dwie inne korelacje są różne od zera, mianowicie $T_{x'y''}$ i $T_{y'x''}$ i mogą być użyte do udowodnienia splątania. Jak widać wyznaczenie fazy Φ nie jest znaczące do detekcji splątania.

⁵ zwyczajowa nazwa dla pierwszego i drugiego obserwatora

Problem pojawia się, gdy stan jest maksymalnie splątany $|\psi_m\rangle$. W takim przypadku wektory Blocha mają zerową długość i stan ma nieskończenie wiele możliwych rozkładów Schmidta. Jeśli Bob dowolnie wybierze pewną bazę, Alicja może zawsze znaleźć taką bazę, że stan $|\psi_m\rangle$ nie ulegnie zmianie. Aby rozwiązać problem, Bob wybiera, dla przykładu, standardową bazę, jako swoją bazę Schmidta i stosuje filtrowanie w tej bazie $F = |0\rangle\langle 0| + \epsilon|1\rangle\langle 1|$. W wyniku filtrowania stan staje się niesymetryczny i pojawia się wektor Blocha u Alicji, która może wyznaczyć w ten sposób swoją bazę Schmidta. Po wyznaczeniu baz Schmidta i kalibracji pomiarów, filtr jest usuwany i przystępujemy do pomiaru korelacji, jak w poprzednim przypadku.



Rysunek 4: Algorytm detekcji splątania dla dowolnego stanu czystego dwóch kubitów niewymagająca wiedzy o stanie, ani uzgodnionych lokalnych układów odniesienia.

Schemat procedury przedstawiony jest na rysunku 4. Podsumowując, procedura (bez żadnej dodatkowej wiedzy i wcześniejszej kalibracji) wymaga 2x3 lokalnych pomiarów (wektory Blocha) i ewentualnie 3 dodatkowych w przypadku filtrowania. Następnie do wykrycia splątania wymagane są tylko 2 pomiary korelacji (i ewentualnie trzeci, gdy $\Phi = \pi/2$). Metoda została z powodzeniem zastosowana w eksperymencie dla przypadkowego stanu dwóch kubitów bliskiemu stanowi czystemu. Opis i wyniki eksperymentu zostały zamieszczone w pracy [J] i [K]. Eksperyment przeprowadziła grupa z Monachium.

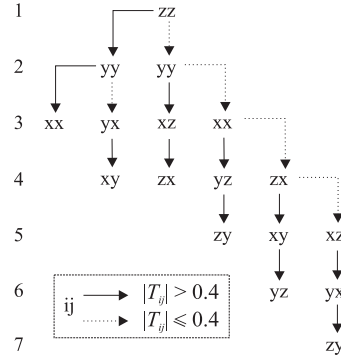
Drzewo decyzji. Adeptacyjna detekcja splątania

Druga metoda nie wymaga wstępnych pomiarów i z powodzeniem może być użyta dla stanów mieszanych i wielocząstkowych. Bazując na zasadzie komplementarności podanej w pracy [G] i opisanej w podrozdziale IV.C.9 proponujemy adaptacyjną metodę, w której kolejne ustawienia pomiarowe wynikają z poprzednich. Metoda zostanie przedstawiona dla najprostrzego przypadku dwóch kubitów.

Alicja i Bob wybierają trzy ortogonalne kierunki x, y i z niezależnie od siebie. Na rysunku 5 prezentujemy, które korelacje powinny być mierzone w celu wykrycia splątania w kilku krokach. Rozpoczynamy pomiarem T_{zz} i kontynuujemy wzdłuż ciągłej (kropkowanej) linii, gdy zmierzona korelacja jest większa (mniejsza) od pewnej wartości granicznej t (symulacje numeryczne pokazały, że dla $t = 0.4$ efektywność metody jest największa).

Konstrukcja drzewa opiera się o zasadę komplementarności korelacji. Z tego powodu, jeśli korelacja $|T_{zz}|$ jest duża, to korelacje $|T_{zx}|, |T_{zy}|, |T_{xz}|$ i $|T_{yz}|$ muszą być małe, ponieważ odpowiadające im operatory antykomutują z operatorem $\sigma_z \otimes \sigma_z$. W związku z tym, następny znaczący pomiar musi leżeć w płaszczyźnie xy . W przypadku, gdy dojdziemy do krawędzi drzewa decyzji ustalana jest dalsza strategia pomiarów biorąca pod uwagę wartości wszystkich do tej pory zmierzonych korelacji. W pracy [K] został zaprezentowany algorytm, jak krok po kroku wygenerować drzewo decyzji dla dowolnej liczby kubitów.

krok Korelacje do zmiernia



Rysunek 5: Strategia decyzji do wykrycia splątania.

Efektywność drzewa decyzji, mierzona procentem wykrywanych stanów splątanych w danej liczbie kroków, wzrasta wraz z czystością stanów. Dla dwóch kubitów, w 3 krokach wykrywanych jest ok. 20% stanów, w 5 krokach – 60% stanów i 9 krokach – wszystkie stany. Dla stanów mieszanych o czystości $p \geq 0.75$ te liczby wynoszą odpowiednio: 5%, 20% i 65%. Wszystkie stany o *negativity* [Vidal2002] większej niż 0.2 wykrywane są co najwyżej w 9 krokach.

Jeśli porównamy przewagę drzew decyzji nad losowym wyborem kolejności pomiarów to okaże się, że dla $N=2$ kubitów (w stanie czystym) wynosi ona 1 krok, dla $N=3$ – 2 kroki, $N=4$ – 6 kroków, $N=5$ – 15 kroków, $N=6$ – 40 kroków i $N=7$ – 106 kroków. Ta przewaga zdaje się rosnać wykładniczo z liczbą kubitów.

Działanie drzewa decyzji zostało zastosowane do kilkunastu stanów (dwóch, trzech i czterech kubitów) otrzymanych w eksperymentach wykonanych przez grupę z Monachium. Opis eksperymentów i uzyskane wyniki zaprezentowane są w pracy [K].

11. Optymalny test lokalnego realizmu

Przejdźmy teraz do drugiego aspektu charakteryzacji nieklasycznych własności stanów kwantowych, mianowicie lokalnego i realistycznego ⁶ opisu kwantowych korelacji. Wprowadźmy pojęcie optymalnego testu na występowanie takiego opisu rozumianego jako warunek konieczny i wystarczający na jego istnienie. Taki warunek sformułowany jest poprzez pełen zestaw, tak zwanych, przylegających nierówności Bella, które definiują wszystkie ściany wielościanu wypukłego Pitowsky’ego [Pitowsky1989]. Pomimo tego, iż istnieje mnóstwo nierówności typu Bella, pełne zestawy nierówności przylegających zostały ściśle sformułowane tylko dla następujących sytuacji eksperymentalnych:

- kubity, N obserwatorów, po dwa alternatywne ustawienia pomiarowe [WWWZB2001],
- kubity, dwóch obserwatorów, po dwa ustawienia pomiarowe [Clauser1969, Clauser1974],
- kubity, dwóch obserwatorów, po trzy ustawienia pomiarowe [Collins2004, Pitowsky2001, Żukowski2006],

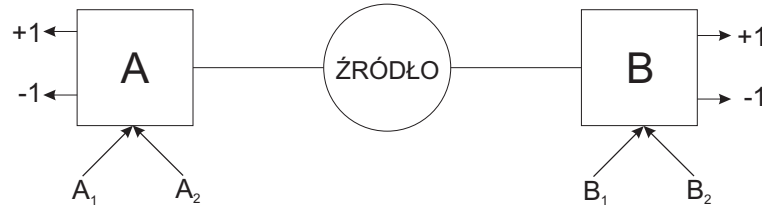
⁶ *lokalność* - wyniki pomiarów w jednym laboratorium zależą jedynie od lokalnego ustawienia aparatury pomiarowej. Nie zależą od wyboru obserwacji w drugim laboratorium i odwrotnie; *realizm* - układ fizyczny niesie ze sobą informacje o rezultatach wszystkich możliwych pomiarów, które mogą być na nim przeprowadzone; *wolna wola* - obserwatorzy decydują o wyborze mierzonych obserwacji w sposób obiektywnie przypadkowy, niezależny od pozostałych zjawisk związanych z eksperymentem

- kubity, trzech obserwatorów, po trzy ustawienia pomiarowe [Wieśniak2006],
- kudyty, dwóch obserwatorów, po dwa alternatywne ustawienia pomiarowe [CGLMP2002],

przy czym tylko [Clauser1974], [Pitowsky2001], [Collins2004] i [CGLMP2002] sformułowane są dla prawdopodobieństw. Takie nierówności są bardziej ogólne, ponieważ prawdopodobieństwa zawierają całą dostępną wiedzę o eksperymencie, podczas gdy korelacje tylko częściową (po uśrednieniu).

Poszukiwanie zestawów przylegających nierówności dla coraz bardziej skomplikowanych sytuacji eksperymentalnych stanowi ogromny problem obliczeniowy. Wychodząc temu naprzeciw zaprojektowaliśmy numeryczną metodę badania konfliktu pomiędzy przewidywaniami mechaniki kwantowej a lokalnym i realistycznym opisem. Wyniki stanowią daleko idące rozwinięcie metody [Kaszlikowski2000] i zostały opublikowane w [F]. Metoda nie bazuje na znajomości żadnych nierówności Bella. Jej wynik jest natomiast równoważny analizie pełnego zbioru nierówności Bella sformułowanych na prawdopodobieństwach.

Opis działania metody zostanie przedstawiony na najprostrzym przykładzie, w którym dwóch obserwatorów A i B dokonuje pomiarów mając do dyspozycji dwie alternatywne dychotomiczne obserwable: A_1, A_2 (pierwszy obserwator) i B_1, B_2 (drugi obserwator) (patrz rysunek 6). W wyniku eksperymentu otrzymują oni wyniki ± 1 . Istnienie lokalnego i realistycznego opisu korelacji jest równoważne istnieniu



Rysunek 6: Typowy eksperyment Bella

łącznej dystrybucji prawdopodobieństwa $p_{tr}(a_1, a_2, b_1, b_2)$, która odtwarza kwantowe prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń, jako prawdopodobieństwa brzegowe:

$$P_{QM}(a_i, b_j | A_i, B_j) = \sum_{a_{i+1}, b_{j+1} = \pm 1} p_{tr}(a_1, a_2, b_1, b_2), \quad (19)$$

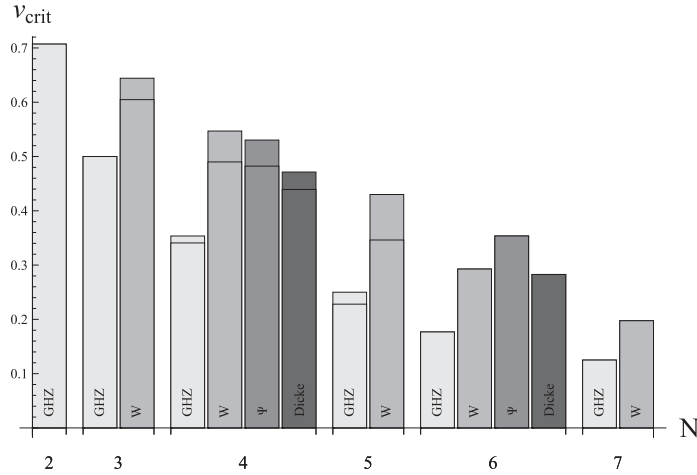
gdzie $P_{QM}(a_i, b_j | A_i, B_j)$ oznacza kwantowe prawdopodobieństwo takiego zdarzenia, że pierwszy obserwator otrzymał wynik a_i i drugi obserwator wynik b_j , gdy wybrali obserwable odpowiednio A_i i B_j . Dla tej sytuacji możemy sformułować 16 takich równań. W kolejnym kroku wprowadzamy parametr “łamania” lokalnego realizmu v_{crit} , który pośrednio $(1 - v_{crit})$ odpowiada ilości białego szumu, który musimy dodać do stanu, by ukryć nieklasyczny charakter jego oryginalnych korelacji. W tym celu wprowadzamy stan

$$\rho(v) = v\rho + \frac{1-v}{4}\mathbb{1}. \quad (20)$$

Znalezienie dla danego stanu ρ , krytycznego parametru v_{crit} (nazywanego dalej krytyczną widzialnością) polega na znalezieniu maksymalnego v dla wybranego zestawu losowych obserwabl A_i i B_j pod warunkiem, że wszystkie równania (19) są spełnione. Jest to typowy problem programowania linowego. Następnie następuje minimalizacja v_{crit} po wszystkich możliwych A_i i B_j . Jako wynik otrzymujemy parametr v_{crit} oraz zestaw obserwabl, które do niego prowadzą. Wiemy, że dla $v > v_{crit}$ nie istnieje łączna dystrybucja prawdopodobieństwa, która odtwarza kwantowe przewidywania dla stanu ρ .

Kubity

W pracy [F] poddano analizie różne typy kubitowych stanów kwantowych: $|GHZ_N\rangle$, $|W_N\rangle$, singlet czterokubitowy $|\Psi_4\rangle$ [Weinfurter2001] i sześciokubitowy $|\Psi_6\rangle$ [Cabello2003], symetryczny stan Dickego $|D_N^{N/2}\rangle$, czterokubitowy stan klastrowy $|C_4\rangle$ [Briegel2001], a także stany ze splątaniem związanym: Bennetta [Bennett1999], Düra [Dür2001] i Smolina [Augusiak2006]. W każdym z przypadków wyznaczono krytyczne widzialności v_{crit} dla różnych liczb ustawień pomiarowych u każdego z obserwatorów. Wyniki liczbowe zostały zamieszczone w tabelach w pracy [F], a niektóre z nich zaprezentowane na rysunku 7. Prowadzą one do następujących obserwacji.



Rysunek 7: Krytyczne widzialności dla wybranych stanów kwantowych, które są konieczne do zaprzeczenia lokalnemu i realistycznemu opisowi w eksperymencie z dwoma ustawieniami. Dodatkowe linie w niektórych przypadkach odpowiadają krytycznej widzialności w trzyustawieniowym eksperymencie.

Obserwacja 1. Postać nierówności Bella wyrażonych poprzez prawdopodobieństwa znana jest tylko w kilku sytuacjach wymienionych na wstępie tego rozdziału. Dla tych przypadków metoda numeryczna powinna dać te same wyniki, jak uzyskane za pomocą nierówności. Zostało to potwierdzone we wszystkich przypadkach dla różnych stanów (z dokładnością do 4 miejsc po przecinku).

Obserwacja 2. Nierówności WWWZB [WWWZB2001] ograniczają lokalne i realistyczne korelacje w N -kubitowym eksperymencie z dwoma ustawieniami u każdego z obserwatorów. Metoda numeryczna powinna dać wyniki lepsze (gdyż opiera się na prawdopodobieństwach) lub przynajmniej takie same. Takie same wyniki zostały uzyskane dla stanów: $|GHZ_N\rangle$ ($N \leq 7$), $|D_4^2\rangle$, $|\Psi_4\rangle$, $|C_4\rangle$, $|\Psi_6\rangle$ i $|D_6^3\rangle$. Silniejsze ograniczenia na lokalny realizm zostały zaobserwowane dla stanu $|W_N\rangle$ ($N \leq 7$) o około 2% dla trzech kubitów i 208% (!) dla siedmiu kubitów.

Obserwacja 3. Postać nierówności dla funkcji korelacji dla wielu kubitów i wielu ustawień pomiarowych jest wciąż nieznana. Nierówności zostały skonstruowane tylko dla szczególnych przypadków (np. $2^{N-1} \times 2^{N-1} \times 2^{N-2} \times \dots \times 2$ [2] – liczby oznaczają ilości ustawień u każdego z obserwatorów – taka notacja będzie stosowana dalej). Jest również rodzina korelacyjnych nierówności dla wielu kubitów i ustalonej liczby ustawień pomiarowych [3]. Te nierówności niestety nie są przylegające. W obu przypadkach numeryczna metoda daje silniejsze rezultaty dla stanów (aż nawet do 28%): $|GHZ_3\rangle$ (2x2x2-4x4x4), $|GHZ_4\rangle$ (3x3x3x3), $|W_3\rangle$ (4x4x2 i 3x3x3, 4x4x4, 5x5x5), $|W_4\rangle$, $|\Psi_4\rangle$ i $|D_4^2\rangle$ (2x2x2x2, 3x3x3x3) oraz taki sam dla $|GHZ_3\rangle$ (4x4x2).

Obserwacja 4. W wielu przypadkach v_{crit} maleje ze wzrostem liczby ustawień. Największy skok (19%) zaobserwowaliśmy dla stanu $|W_5\rangle$ pomiędzy dwoma a trzema ustawieniami u każdego z obserwatorów. Co ciekawe, dla dwu i trójkubitowego stanu GHZ nie obserwujemy tego efektu.

Obserwacja 5. Najmniejsza liczba ustawień pomiarowych określa dolne ograniczenie na krytyczną widzialność. Wybierając liczbę ustawień u jednego z obserwatorów na 2 i zwiększając liczbę ustawień u pozostałych obserwatorów (do 6 w przypadku 3 obserwatorów i do 4 w przypadku 4 obserwatorów) nie osiągnęliśmy krytycznej widzialności mniejszej niż dla przypadku, gdy wszyscy obserwatorzy wybierają trzy ustawienia. Obliczenia przeprowadziliśmy dla stanów: $|W_3\rangle$, $|W_4\rangle$, $|GHZ_3\rangle$, $|GHZ_4\rangle$, $|\Psi_4\rangle$ i $|D_4^2\rangle$.

Obserwacja 6. N -kubitowy stan GHZ posiada najsilniejsze nieklasyczne własności, aż do $N \leq 8$. Jednakże możemy zaobserwować, iż różnica pomiędzy widzialnościami krytycznymi dla stanu GHZ i W maleje ze wzrostem liczby kubitów. Z innej strony wiemy, że stan W prowadzi do większej nieklasyczności niż GHZ dla $N > 10$ [Sen2003]. Znalezienie przykładu dla $N \leq 10$ jest wciąż otwartym problemem.

Obserwacja 7. Stan Smolina ze splątaniem związanym dla czterech i sześciu kubitów łamie lokalny realizm. Krytyczne widzialności dla dwóch ustawień u każdego z obserwatorów zgodne są z [Augusiak2006]. Zwiększając liczbę ustawień do trzech obserwujemy zmniejszenie widzialności krytycznej.

Obserwacja 8. Wiadomo, że stan ze splątaniem związanym Dür'a łamie nierówności Bella. Najprostrza sytuacja eksperymentalna wymaga siedmiu kubitów i trzech ustawień pomiarowych [Kaszlikowski2002], sześciu kubitów i pięciu ustawień pomiarowych [3], czy ośmiu kubitów i dwóch ustawień pomiarowych [Dür2001]. Używając metody numerycznej nie znaleźliśmy łamania lokalnego realizmu w sytuacjach dwóch i trzech ustawień dla czterech i pięciu kubitów oraz dwóch ustawień dla sześciu i siedmiu kubitów. Znalezienie łamania lokalnego realizmu w sytuacjach prostrzych, niż wyznaczone przez nierówności, jeśli jest możliwe, pozostaje otwartym problemem.

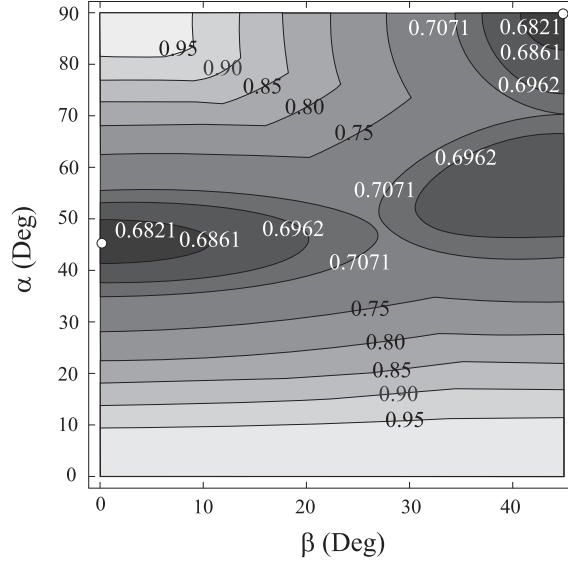
Metody numerycznej użyliśmy również do danych uzyskanych w eksperymentach wielofotonowych grupy z Monachium. W pierwszym kroku należało użyć standardowych metod kwantowej tomografii, w celu zrekonstruowania macierzy gęstości ρ . Tak otrzymana macierz najczęściej jest niefizyczna ze względu na błędy wynikające ze statystyki zliczeń. Taka macierz nie nadaje się do analizowania naszą metodą i prowadzi do łamania lokalnego realizmu z widzialnością równą 0 (!). Warunek dodatniości dystrybucji prawdopodobieństwa nie będzie spełniony, a co za tym idzie taka dystrybucja nie zostanie znaleziona. Na szczęście istnieją metody dopasowywania fizycznej macierzy gęstości do danych eksperymentalnych. Metody numerycznej użyliśmy do wyznaczenia krytycznych widzialności z rekonstruowanych stanów. We wszystkich przypadkach $v_{crit} < 1$, co oznacza, że eksperyment nie może być opisany lokalnymi i realistycznymi teoriami. Dane liczbowe zawarte są w pracy [F].

Kutrity

Wyniki zawarte w poprzednim podrozdziale dotyczyły przypadków kubitowych. W pracy [G] opisana metoda numeryczna została zastosowana do analizy dwu-kutritowego eksperymentu z dwoma ustawieniami u każdego z obserwatorów. Obserwable były absolutnie ogólne, definiowane przez transformacje unitarne z grupy $U(3)$. Analizie poddano najbardziej ogólny stan dwóch kutritów przedstawiony w rozkładzie Schmidta:

$$|\psi\rangle = \cos\alpha|00\rangle + \sin\alpha\cos\beta|11\rangle + \sin\alpha\sin\beta|22\rangle, \quad (21)$$

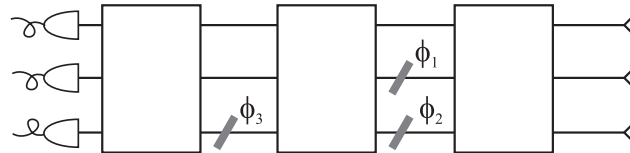
dla którego wyznaczono krytyczne widzialności $v_{crit}(\alpha, \beta)$ w funkcji parametrów α i β . W wyniku obliczeń numerycznych powstała mapa krytycznych widzialności, która jest zaprezentowana na rysunku 8. Trzy najciemniejsze okręgi wyznaczające obszary pomiędzy widzialnościami krytycznymi 0.6821 a 0.6861 nie



Rysunek 8: Mapa krytycznych widzialności dla stanu 21 i dowolnych pomiarów. Jeśli $v > v_{crit}$ to nie istnieje lokalny i realistyczny model opisujący kwantowe prawdopodobieństwa.

były do tej pory znane. Wyższa z tych liczb odpowiada krytycznej widzialności dla pewnego stanu asymetrycznego, który łamie najbardziej nierówność CGLMP [CGLMP2002, Acin2005]. Używane do tej pory metody nie pozwalały na uzyskanie bardziej nieklasycznych własności. Były one ograniczone do nierówności CGLMP i pomiarów opartych na tzw. multiportach (wielomodowych dzielnikach światła) [Żukowski1997]. Niespodziewanie najniższa krytyczna widzialność $v_{crit} = 0.6821$ odpowiada stanowi $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, czyli stanowi typu kubitowego (rank-2). Ta sama wartość widzialności została podana w pracy [Acin2005], ale w wyniku zastosowania podejścia *ad hoc* i w kontekście rozważania domieszki białego szumu, jako miary nieklasyczności. Dla cztero- i pięciowymiarowych systemów efekt wydaje się nawet większy. Krytyczne widzialności dla stanów typu rank-2 wynoszą odpowiednio 0.6442 i 0.6071, podczas gdy najniższe do tej pory znane (dla stanów asymetrycznych łamiących najbardziej nierówność CGLMP) wynoszą odpowiednio 0.6728 i 0.6632.

Dodatkowym zagadnieniem rozważanym w pracy [G] jest próba symulowania pomiarów opartych na ogólnej transformacji $U(3)$ poprzez zestawy multiportów. Okazuje się, że badając nieklasyczne własności stanu (21) odtworzymy mapę splątania z maksymalną niedokładnością 1.5% używając względnie prostego układu trzech multiportów z trzema fazami (patrz rysunek 9).



Rysunek 9: Urządzenie pomiarowe u jednego z obserwatorów. Układ trzech multiportów z trzema dowolnymi fazami, który z dużą dokładnością odtwarza wyniki eksperymentu Bella dla stanu (21) uzyskane przy użyciu zupełnie dowolnych pomiarów.

V. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO - BADAWCZYCH (ARTYSTYCZNYCH)

Dane bibliometryczne:

- liczba publikacji: **26**, w tym **19** po uzyskaniu stopnia doktora
- łączna liczba cytowań: **279**, w tym **237** bez autocytaowań
- indeks Hirscha: **10**
- sumaryczny impact factor: **103,30**

A. osiągnięcia przed uzyskaniem stopnia naukowego doktora

1. Nowe nierówności Bella

Wyprowadziliśmy nowe przylegające nierówności typu Bella dla $N > 2$ obserwatorów dla sytuacji eksperymentalnej, w której obserwatorzy wybierają więcej niż dwa alternatywne ustawienia ($2^{N-1} \times 2^{N-1} \times 2^{N-1} \times \dots \times 2$ ustawień u określonych obserwatorów) [2]. Przedstawiamy warunek konieczny i wystarczający na łamanie nierówności przez dowolny stan. Pokazujemy, że nierówności są łamane przez pewne klasy stanów, dla których standardowe nierówności Bella (z dwoma ustawieniami) są spełnione. Dzięki zaproponowanej metodzie możemy również otrzymać nierówności nienależące do powyższej rodziny, wymagające $8 \times 4 \times 4 \times 4$ ustawień [6].

Ukazujemy również, iż niezmienniczość praw fizyki ze względu na obroty układów odniesienia, prowadzi do dodatkowych ograniczeń na istnienie lokalnego i realistycznego opisu dla kwantowych funkcji korelacji [5]. To nowe ograniczenie zabrania istnienia takiego opisu w niektórych sytuacjach, gdy standardowe nierówności Bella zezwalają na jego istnienie. Co więcej, nowe ograniczenie nie komplikuje złożoności eksperymentalnej problemu. Wszystkie dane, jakie są niezbędne do jego otrzymania, można uzyskać w eksperymencie wymagającym tylko dwóch ortogonalnych ustawień aparatury u każdego z obserwatorów, czyli tak, jak w przypadku standardowych nierówności Bella.

Proponujemy również kolejną serię nierówności Bella dla wielu obserwatorów i dowolnie ustalonej liczby ustawień u każdego z nich [3]. Została ona wyprowadzona w oparciu o pewien geometryczny fakt. Podajemy również warunek konieczny i wystarczający na złamanie tej nierówności przez stan kwantowy. Również w tym przypadku okazuje się, że klasa stanów, które nie posiadają lokalnego i realistycznego opisu korelacji zostaje znów poszerzona. Zaprezentowany został również związek pomiędzy nierównością a problemem złożoności komunikacyjnej obliczeń, gdzie łamanie nierówności gwarantuje redukcję tej złożoności.

2. Wykrywanie prawdziwego wielocząstkowego splątania

Wykorzystaliśmy nową, silniejszą wersję twierdzenia Bella [5] do wykrywania prawdziwych N -cząstkowych korelacji w układach złożonych z N kubitów [7]. Uzyskaliśmy nowy, bardziej czuły, warunek na rozróżnianie pomiędzy pełnymi N -cząstkowymi korelacjami a korelacjami występującymi tylko pomiędzy mniejszą ilością cząstek w takich układach.

3. Pozostałe wyniki

Nawiązując do tzw. twierdzenia Gisina, które stanowi, że dowolny stan splątany dwóch kubitów łamie nierówność Bella dla funkcji korelacji i dwóch alternatywnych ustawień pomiarowych (CHSH), pokazujemy, że istnieją wielokubitowe ($N > 2$) czyste stany splątane, które nie łamią żadnej nierówności Bella dla N -cząstkowych funkcji korelacji i dwóch ustawień pomiarowych u każdego z obserwatorów [8].

Poddajemy także analizie nieklasyczne własności trójkubitowego stanu W [9], który został zaobserwowany w eksperymencie grupy z Monachium. Była to pierwsza eksperymentalna obserwacja tego stanu. Wyznaczamy krytyczne parametry, które winny być zachowane w eksperymencie (krytyczna widzialność) by przywidywania stanu nie mogłyby być modelowane klasycznie.

B. osiągnięcia po uzyskaniu stopnia naukowego doktora

1. Charakterystyczne operatory Bella

Proponujemy strategię generowania charakterystycznych nierówności Bella dla dwóch typów stanów splątanych czterech kubitów [10]. Oznacza to, iż taka nierówność jest najbardziej łamana przez przewidywania danego stanu kwantowego. Dzięki tej własności nierówności nadają się do rozróżniania pomiędzy danym stanem, a innymi stanami otrzymanymi w eksperymencie, a dzięki swej konstrukcji wymagają przeprowadzenia mniejszej ilości pomiarów niż w przypadku znanego operatora wierności. Prezentowana strategia może być rozszerzona na inne stany kwantowe. Został również przeprowadzony eksperyment przez grupę z Monachium, w którym zademonstrowano łamanie tych nierówności przez wybrane stany czterech kubitów. (część wyników została zawarta w rozprawie doktorskiej)

2. Gry kwantowe

Pokazujemy, że dla pewnej ciągłej rodziny czterokubitowych stanów splątanych, zadanie maksymalizacji funkcji zysku w cztero-graczowej kwantowej gry mniejszościowej jest równoważne maksymalizowaniu łamania standardowej nierówności Bella dla czterech kubitów [11]. Wyciągamy wniosek, że istnieje bezpośredni związek pomiędzy zyskiem, nierównością Bella, a strategią wyboru obserwabli w obliczaniu tych nierówności. Pokazujemy również, że taki związek jest unikalny dla gier typu mniejszościowego.

3. Fundamentalne ograniczenia na eksperymenty z wykorzystaniem zjawiska PDC

Pokazujemy, iż widzialność (kontrast interferometryczny) w eksperymencie wykorzystującym splątane pary fotonów uzyskane w zjawisku parametrycznego podziału częstości (PDC) ulega pogorszeniu między innymi z powodu kreacji większej ilości par fotonów, niż spodziewane [12] (wyniki zostały częściowo zawarte w rozprawie doktorskiej). W konsekwencji opracowaliśmy metodę zapobiegającą temu negatywnemu efektowi [13], wykorzystującą wielomodowe dzielniki światła.

4. Wielofotonowa interferencja, jako narzędzie do obserwacji rodzin stanów splątanych

Zjawisko parametrycznego podziału częstości w połączeniu z liniową optyką jest użyte do obserwacji różnych wielofotonowych stanów splątanych. Do tej pory danemu stanowi splątanemu był dedykowany konkretny zestaw eksperymentalny, który był użyteczny tylko dla tego stanu. Pokazujemy jak poprzez użycie wielofotonowej interferencji, można obserwować rodziny wielofotonowych stanów splątanych w jednym i tym samym zestawie eksperymentalnym [14].

5. Aktywacja łamania nierówności Bella

Pokazaliśmy, że wielokrotne zastosowanie zjawiska wymiany splątania, może prowadzić do uzyskania nieklasycznych właściwości przez stany uprzednio klasyczne. Rozważamy wielokrotną wymianę splątania w łańcuchu stanów dwucząstkowych [15]. Stany dobrano w taki sposób, iż nie łamały one nierówności Bella. Pokazano, że istnieje krytyczna długość łańcucha, przy której pojawia się łamanie nierówności.

6. Niekompatybilne modele ukrytych zmiennych

Podjęliśmy również problem niekompatybilności modeli ukrytych zmiennych dla podukładów. Prezentujemy stan kwantowy posiadający modele ukrytych zmiennych dla korelacji pomiędzy dowolnymi podsystemami, które nie mogą być rozszerzone do modelu jednocześnie opisującego korelacje pomiędzy wszystkimi podsystemami [4].

7. Informacja Fishera a wielocząstkowe splątanie

Informacja Fishera daje nam ograniczenie na precyzję w protokole estymacji fazy interferometru. Rozważamy związek pomiędzy informacją Fishera a wielocząstkowym splątaniem [16]. Wyprowadzamy szereg warunków charakteryzujących wielocząstkowe splątanie. Ilustrujemy je wieloma przykładami. Wprowadzamy także pojęcie średniej informacji Fishera (uśrednionej po wszystkich możliwych kierunkach obrotu, które reprezentują interferometry), która prowadzi do silniejszych warunków na wielocząstkowe splątanie. Przeprowadzony został eksperyment przez grupę z Monachium.

LITERATURA

- [A] P. Badziąg, Č. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, Experimentally friendly geometrical criteria for entanglement, *Phys. Rev. Lett.* 100, 140403 (2008).
- [B] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, Entanglement witnesses with variable number of local measurements, *Phys. Rev. A* 88, 022304 (2013).
- [C] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, M. Żukowski, Correlation-tensor criteria for genuine multiqubit entanglement, *Phys. Rev. A* 84, 062305 (2011).
- [D] M. Markiewicz, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, Detecting genuine multipartite entanglement of pure states with bipartite correlations, *Phys. Rev. A* 87, 034301 (2013).

- [E] W. Laskowski, T. Paterek, Č. Brukner, M. Żukowski, Entanglement and communication-reducing properties of noisy N-qubit states, *Phys. Rev. A* 81, 042101 (2010).
- [F] J. Gruca, W. Laskowski, M. Żukowski, N. Kiesel, W. Wieczorek, C. Schmid, H. Weinfurter, Nonclassicality thresholds for multiqubit states: Numerical analysis, *Phys. Rev. A* 82, 012118 (2010).
- [G] J. Gruca, W. Laskowski, M. Żukowski, Nonclassicality of pure two-qutrit entangled states, *Phys. Rev. A* 85, 022118 (2012).
- [I] P. Kurzyński, T. Paterek, R. Ramanathan, W. Laskowski, D. Kaszlikowski, Correlation Complementarity Yields Bell Monogamy Relations, *Phys. Rev. Lett.* 106, 180402 (2011).
- [J] W. Laskowski, D. Richart, C. Schwemmer, T. Paterek, H. Weinfurter, Experimental Schmidt Decomposition and State Independent Entanglement Detection, *Phys. Rev. Lett.* 108, 240501 (2012).
- [K] W. Laskowski, D. Richart, C. Schwemmer, L. Knips, T. Paterek, and H. Weinfurter, Optimized state-independent entanglement detection based on a geometrical threshold criterion, *Phys. Rev. A* 88, 022327 (2013).
- [1] P. Badziąg, Č. Brukner, W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, *Physica Scripta* T135, 014002 (2009).
- [2] W. Laskowski, T. Paterek, M. Żukowski, Č. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* 93, 200401 (2004).
- [3] K. Nagata, W. Laskowski, and T. Paterek, *Phys. Rev. A* 74, 062109 (2006).
- [4] W. Laskowski, M. Markiewicz, T. Paterek, M. Wieśniak, *Phys. Rev. A* 86, 032105 (2012).
- [5] K. Nagata, W. Laskowski, M. Wieśniak, M. Żukowski, *Phys. Rev. Lett.* 93, 230403 (2004).
- [6] T. Paterek, W. Laskowski, M. Żukowski, *Mod. Phys. Lett. A* 21, 111 (2006).
- [7] W. Laskowski, M. Żukowski, *Phys. Rev. A* 72, 062112 (2005).
- [8] M. Żukowski, C. Brukner, W. Laskowski, and M. Wieśniak, *Phys. Rev. Lett.* 88, 210402 (2002)
- [9] N. Kiesel, M. Bourennane, Ch. Kurtsiefer, H. Weinfurter, D. Kaszlikowski, W. Laskowski, and M. Żukowski, *J. Mod. Opt.*, 50, 1131 (2003).
- [10] C. Schmid, N. Kiesel, W. Laskowski, W. Wieczorek, M. Żukowski, H. Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* 100, 200407 (2008)
- [11] A.P. Flitney, M. Schlosshauer, Ch. Schmid, W. Laskowski, L. C. L. Hollenberg, *Phys. Lett. A* 373, 521 (2009)
- [12] W. Laskowski, M. Wieśniak, M. Żukowski, M. Bourennane, H. Weinfurter, *J. Phys. B* 42, 114004 (2009)
- [13] M. Stobińska, W. Laskowski, M. Wieśniak, M. Żukowski, *Phys. Rev. A* 87, 053828 (2013).
- [14] W. Wieczorek, N. Kiesel, C. Schmid, W. Laskowski, M. Żukowski and H. Weinfurter, *IEEE J. Sel. Top. Quantum El.*, 15, 1704 (2009).
- [15] W. Kłobus, W. Laskowski, M. Markiewicz, and Andrzej Grudka, *Physical Review A* 86, 020302(R) (2012).

- [16] P. Hyllus, W. Laskowski, R. Krischek, C. Schwemmer, W. Wieczorek, H. Weinfurter, L. Pezzé, A. Smerzi, *Phys. Rev. A* 85, 022321 (2012).
- [Acin2005] A. Acin, R. Gill, and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* 95, 210402 (2005).
- [Augusiak2006] R. Augusiak and P. Horodecki, *Phys. Rev. A* 73, 012318 (2006).
- [Barrett2005] J. Barrett, L. Hardy, and A. Kent, *Phys. Rev. Lett.* 95, 010503 (2005).
- [Bell1964] J. Bell, *Physics* 1, 195-200 (1964).
- [Bennett1999] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, T. Mor, P. W. Shor, J. A. Smolin, and B. M. Terhal, *Phys. Rev. Lett.* 82, 5385 (1999).
- [Briegel2001] H. J. Briegel and R. Raussendorf, *Phys. Rev. Lett.* 86, 910 (2001).
- [Brukner2004] Č. Brukner, M. Żukowski, J.-W. Pan, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* 92, 127901 (2004).
- [Cabello2003] A. Cabello, *Phys. Rev. A* 68, 012304 (2003).
- [Clauser1969] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* 23, 880 (1969).
- [Clauser1974] J. F. Clauser and M. A. Horne, *Phys. Rev. D* 10, 526 (1974).
- [CGLMP2002] D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar, and S. Popescu, *Phys. Rev. Lett.* 88, 040404 (2002).
- [Collins2004] D. Collins, N. Gisin, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37, 1775 (2004).
- [Dicke1954] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* 93, 99 (1954).
- [Dür2000] W. Dür, G. Vidal, and J. I. Cirac, *Phys. Rev. A* 62, 062314 (2000).
- [Dür2001] W. Dür, *Phys. Rev. Lett.* 87, 230402 (2001).
- [Einstein1935] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* 47, 777 (1935).
- [Greenberger1989] D. M. Greenberger, M. A. Horne, and A. Zeilinger, in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, edited by M. Kafatos (Kluwer Academic, Dordrecht 1989), p. 69.
- [Gühne2010] O. Gühne, M. Seevinck, *New J. Phys.* 12, 053002 (2010); A. Gabriel, B. Hiesmayr, M. Huber, *Quant. Inf. Comput.* 10, 829 (2010).
- [Horodecki1996] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Lett. A* 223, 1 (1996).
- [Horodecki1997] P. Horodecki, *Phys. Lett. A* 232, 333 (1997); D. Chruściński, A. Rutkowski, *Phys. Lett. A* 375, 2793 (2011).
- [Horodecki1999] M. Horodecki and P. Horodecki, *Phys. Rev. A* 59 4206 (1999).
- [Horodecki2009] . Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* 81, 865 (2009).
- [Kaszlikowski2000] D. Kaszlikowski, P. Gnaniński, M. Żukowski, W. Miklaszewski, A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* 85, 4418 (2000).
- [Kaszlikowski2002] D. Kaszlikowski, L. C. Kwak, J. Chen, and C. H. Oh, *Phys. Rev. A* 66, 052309 (2002).

- [Munro2001] W. J. Munro, D. F. V. James, A. G. White, and P. G. Kwiat, Phys. Rev. A 64, 030302(R) (2001); T.-C. Wei, K. Nemoto, P. M. Goldbart, P. G. Kwiat, W. J. Munro, and F. Verstraete, Phys. Rev. A 67, 022110 (2003).
- [Nielsen2000] M. Nielsen, I. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press (2000).
- [Pan2012] J.-W. Pan, Z. Chen, C. Lu, H. Weinfurter, A. Zeilinger, M. Żukowski, Rev. Mod. Phys. 84, 777 (2012).
- [Pitowsky1989] I. Pitowsky, em Quantum probability - quantum logic, Springer, Berlin (1989).
- [Pitowsky2001] I. Pitowsky and K. Svozil, Phys. Rev. A 64, 014102 (2001); C. Śliwa, Phys. Lett. A 317, 165 (2003).
- [Sen2003] A. Sen(De), U. Sen, M. Wieśniak, D. Kaszlikowski, M. Żukowski, Phys. Rev. A 68, 062306 (2003).
- [Tsirelson1980] B. S. Tsirelson, Lett. Math. Phys. 4, 93 (1980).
- [Toner2006] B. Toner, F. Verstraete, arXiv:quant-ph/0611001.
- [Vidal2002] G. Vidal, R. Werner, Phys. Rev. A 65, 032314 (2002).
- [Weinfurter2001] H. Weinfurter and M. Żukowski, Phys. Rev. A 64, 010102(R) (2001).
- [Werner1989] R. Werner, Phys. Rev. A 40, 4277 (1989).
- [Vicente2011] J. Vicente, M. Huber, Phys. Rev. A 84, 062306 (2011).
- [Wieśniak2006] M. Wieśniak, Marek Żukowski, quant-ph//0611083.
- [WWWZB2001] H. Weinfurter and M. Żukowski, Phys. Rev. A 64, 010102(R) (2001); R. F. Werner and M. M. Wolf, Phys. Rev. A 64, 032112 (2001); M. Żukowski and Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. 88, 210401 (2002).
- [Żukowski1997] M. Żukowski, A. Zeilinger, and M. A. Horne, Phys. Rev. A 55, 2564 (1997).
- [Żukowski2002] M. Żukowski and Č. Brukner, Phys. Rev. Lett. 88, 210401 (2002).
- [Żukowski2006] M. Żukowski, Quantum Information Processing 5, 287 (2006).

Gdańsk, 17.09.2013

Wiesław Kostantyn